情報理論(No.12)

2016/12/10

今後の講義予定

12／17　：通常(第13回)

1／ 7　：通常(第14回)

1／ 14　：休み(センター試験)

1／ 21　：試験(第15回)

講義目次

- 16. 連続通信路の通信路容量
  - 16.1 連続情報源のエントロピー
  - 16.2 最大エントロピー定理
  - 16.3 連続情報源の様々なエントロピー
  - 16.4 連続通信路の相互情報量
  - 16.5 速度・ひずみ関数
  - 16.6 連続通信路の通信路容量
- 17. 連続通信路における符号化と離散情報の伝送
  - 17.1 信号空間
  - 17.2 連続通信路の符号化定理
  - 17.3 連続通信路における離散情報の伝送
- 18. 連続通信路における連続情報の伝送
  - 18.1 ひずみ
  - 18.2 情報伝送速度−ひずみ関数
  - 18.3 ガウス情報源の情報伝送速度−ひずみ関数
  - 18.4情報伝送速度−ひずみ関数に関する基本定理

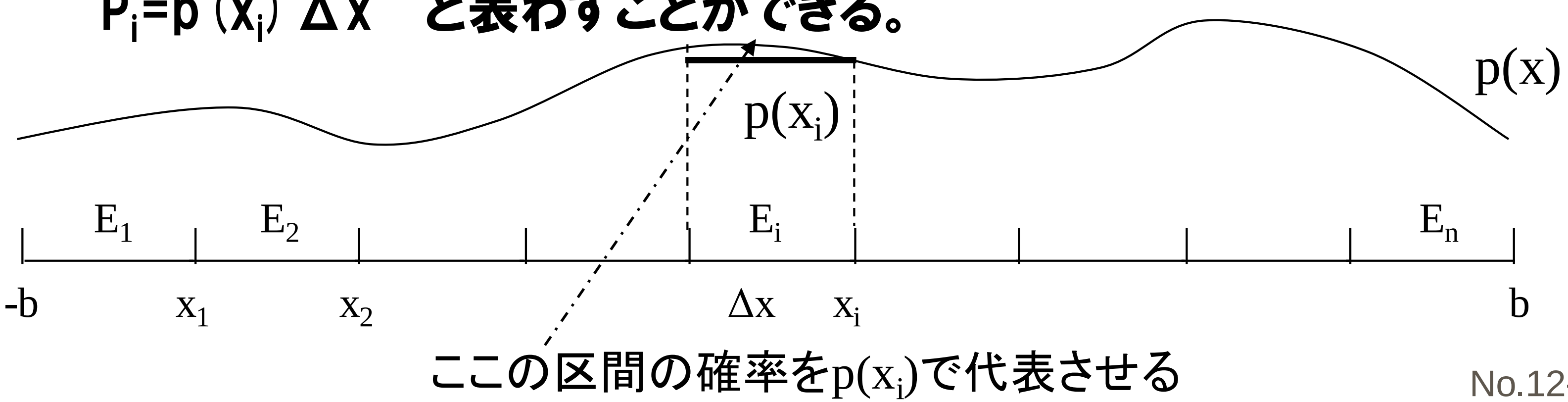
16. 連続通信路の通信路容量

16.1 連続情報源のエントロピー

- 連続的に分布するある数値(x)を考える。この数値の**確率密度**がp(x)で与えられるとする。
- 仮定
  - 確率変数xが出現する範囲を、[-b b]区間とする。即ち、確率密度関数p(x)が、下記とする。

  $p(x)=0 \quad |x|>b, \quad p(x)\geqq 0 \quad |x|\leqq b$
  - 幅2bの範囲[-b b]をn個の微小区間に等分する。各区間を$E_1, E_2, \ldots, E_n$とする。小区間の幅をΔxとし、小区間におけるxの代表値を$x_1, x_2, \ldots, x_n$とする。例えば、
  - $x_i=-b+i\Delta x \quad (i=1,2,\ldots,n)$
  - 小区間E_iにxが入る確率P_iは、x_iにおける確率密度を用いて

  $P_i=p(x_i)\Delta x$　と表わすことができる。



16.1 連続情報源のエントロピー

- 小区間E_iにxが入ることを事象E_iと考えると、１つの**完全事象系**Eが次のように考えられる。

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_n \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{bmatrix} \qquad P_i = p(x_i)\Delta x$$

- 上記の完全事象系Eのエントロピ―H (E) は、

$$H(E) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i$$

で与えられる。H (E) は連続分布(連続情報源)のエントロピーに近似できるものであるが、n個の小区間に量子化して得られた記号列(E_1,E_2,..,E_n)のエントロピーであり、厳密には連続分布のエントロピーではない。

16.1 連続情報源のエントロピー

- 連続分布の情報源のエントロピー
  - 量子化の幅を無限小に細かくしたΔx→0におけるH (E) の極限値として、連続分布のエントロピーを定義する。

$$H(E) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x \ \log p(x_i)\Delta x \qquad (1)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \{p(x_i) \log p(x_i)\}\Delta x - \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x \log \Delta x \qquad (2)$$

$$= \underbrace{-\sum_{i=1}^{n} \{p(x_i) \log p(x_i)\}\Delta x}_{\text{第1項}} - \underbrace{\log \Delta x}_{\text{第2項}} \qquad (3)$$

  - 式 (3) で、Δx→0とすると、第1項は有限値に収束するが、第2項は無限に発散する。第2項は、量子化の細かさに関係する量で、無限大に発散するのは当然である。
  - それで、第2項を無視して、第1項のみの極限値でエントロピーを定義する。

16.1 連続情報源のエントロピー

- **連続情報源のエントロピー**（シャノン）

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\log p(x)\,dx$$

- 意味
  - 離散的完全事象系のエントロピーと異なり、ある基準値から図った相対的量。基準値は、無限大に発散する式(3)の第2項で、これは確率密度p(x)に寄らない定数項であるため、差し引いて定義することは自然である。
- （例1）一様分布情報（信号）
  - 標本値が区間 (a,b)で一様に分布する信号のエントロピーは、確率密度関数 p(x)が

$$p(x) = 1/(b-a), \quad a < x < b$$
$$= 0 \qquad ,\text{上記以外}$$

と書けるので定義式に代入すると、

$$H(x) = -\int_a^b \frac{1}{b-a}\log\frac{1}{b-a}\,dx = \log(b-a)$$

16.1 連続情報源のエントロピー

- （例2） 1次元ガウス分布（ガウス信号）
  - xの分布が平均μ，分散σ²の1次元ガウス分布で与えられるとする。

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \quad , \qquad -\infty < x < +\infty$$

確率密度関数は上式のように書けるので定義式に代入すると、

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log[\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}] dx$$

$$= \log\sqrt{2\pi\sigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx}_{1} + \frac{1}{2\sigma^2} \log_2 e \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)(x-\mu)^2 dx}_{分散(\sigma^2)}$$

$$= \log\sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2} \log_2 e = \log\sqrt{2\pi e \sigma^2}$$

となる。（上記でガウス分布の分散を使っている）

16.1 連続情報源のエントロピーの性質

- 連続情報のエントロピーは形式的に定義されたものであるから、その値は正にも負にもなる。
  - 例えば、一様分布ではb-a=1のときH(X)=0となり、 b-a>1のときH(X)>0, b-a<1のときH(X)<0となる。
- エントロピー最大になる確率分布
  - 一般に確率密度関数p(x)が広く分布しているほど、エントロピーH(X)は大きい。
    - 例えば、一様分布でb-a→∞ならばエントロピー無限大となる。
    - ガウス分布で、分散σ^{2}が大きいほどエントロピーが大きい。
  - 分布に条件をつけたときの最大エントロピーの定理
    - 分散σ^{2}をもつ分布 p(x) のエントロピーは、次の不等式を満たす

$$H(X) \le \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma^2}$$

    - H(X)が最大になるp(X)の分布はガウス分布である.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

16.2 最大エントロピー定理

- ［最大エントロピー定理］ 分布 p (x) があり，分散をσ^{2}とする．すなわち，

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \qquad \text{..........(1)}$$

このとき，H (x) が最大となるp (x) の分布は1次元ガウス分布で与えられる．

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -p(x)\log p(x)dx \qquad \text{..........(2)}$$

- ［証明］ 変分法を用いる．ラグランジュの未定係数をμ，λとして，次式のp (x)，μ，λについての変分をそれぞれ0とおけばよい．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}[-p(x)\log p(x)]dx + \lambda\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x)x^2dx - \sigma^2\right) + \mu\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x)]dx \text{ - } 1\right)$$

..........(3)

16.2 最大エントロピー定理の証明(つづき)

- 式(3)をμ，λについては偏微分して0とおくと，式(1)(2)が得られる．

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)dx-\sigma^2=0 \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}x^2 p(x)dx=\sigma^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial \mu}=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx-1=0 \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$$

- p(x)について偏微分する代わりに同等の意味を与える微小変化を考えて，p(x)+εp(x)とすれば次式となる．

$$I+\Delta I=\int_{-\infty}^{\infty}\left[p(x)\log_2\frac{1}{p(x)}\lambda p(x)x^2+\mu p(x)\right]dx$$

$$+\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\log_2 e-\log_2 p(x)+\lambda x^2+\mu\right]p(x)dx \qquad \text{..........(4)}$$

16.2 証明(つづき)

- 分布p (x) でIが最大とすれば，どのような変分 ε p (x) に対してもΔI=0でなければならないので，

$$-\log_2 e - \log_2 p(x) + \lambda x^2 + \mu = 0 \qquad \text{..........(5)}$$

が導かれる．これより，次式が求まる．

$$p(x) = 2^{-\log_2 e + \lambda x^2 + \mu} \qquad \text{..........(6)}$$

- このように，分散を最大にする分布p (x) はガウス分布となる．λとμは式 (1) より決定でき，結局次式が得られる．

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

16.3 連続情報源の様々なエントロピー

- **多次元エントロピー**
  - **多次元の確率分布を持つ複数個の標本値に対して拡張される。**
  - **n次元分布p $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ のエントロピーは、**

$$H(X_1,X_2,\cdots,X_n)=$$

$$-\int\cdots\int p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\log p(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

で定義される。

- **2次元分布の結合エントロピー**
  - **特に2次元の分布p (x,y) に関しては、**

$$H(X,Y)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\log p(x,y)dxdy$$

で結合エントロピーが定義される。

- **2次元分布の条件付エントロピー**

$$H(X|Y)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\log p(x|y)dxdy$$

16.3 連続情報源の様々なエントロピー

- 2次元分布の条件付エントロピー

$$H(Y|X) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\log p(y|x)\,dxdy$$

- 成立する関係式
  - H(X,Y) ≦H(X)+H(Y) .... (1)
  - H(X|Y) ≦H(X) .... (2)
  - H(Y|X) ≦H(Y) .... (3)
  - H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)=H(Y)+H(X|Y) .... (4)

式(1)～(3)において等号は，XとYが統計的に独立(=無関係)のときに成り立つ．
このように，離散的情報源のエントロピーと同じ性質がある

16.3 各種のエントロピー

- **事前エントロピー**

$$H(x) = -\int p(x)\log_2 p(x)\,dx$$

- **出力エントロピー**

$$H(y) = -\int p(y)\log_2 p(y)\,dy$$

- **結合エントロピー**

$$H(x,y) = -\int\int p(x,y)\log_2 p(x,y)\,dxdy$$

- **条件付エントロピー**

$$H(y\,|\,x) = -\int\int p(x,y)\log_2 p(y\,|\,x)\,dxdy$$ …….散布度

$$H(x\,|\,y) = -\int\int p(x,y)\log_2 p(x\,|\,y)\,dxdy$$ …….曖昧度

16.4 連続通信路の相互情報量

- 離散通信路の場合と同様に下記のように定義される：入力xと出力yの**相互情報量**は、

  $I(x;y)=H(x)-H(x|y)$

  で定義する。
- yを知らないときにxを表わすのに必要な平均ビット数と、yを知った後でxを表わすのに必要な平均ビット数の差。
- 一般に、連続情報源のエントロピーは、その定義から離散的情報源のエントロピーを利用しており、本質的に量子化間隔Δに関係する。
- 相互情報量は、H(x)のエントロピーとH(x|y)のエントロピーの差で表わされるので、量子化間隔Δに関係する項は打ち消しあい、I(x;y)はΔに無関係となる。

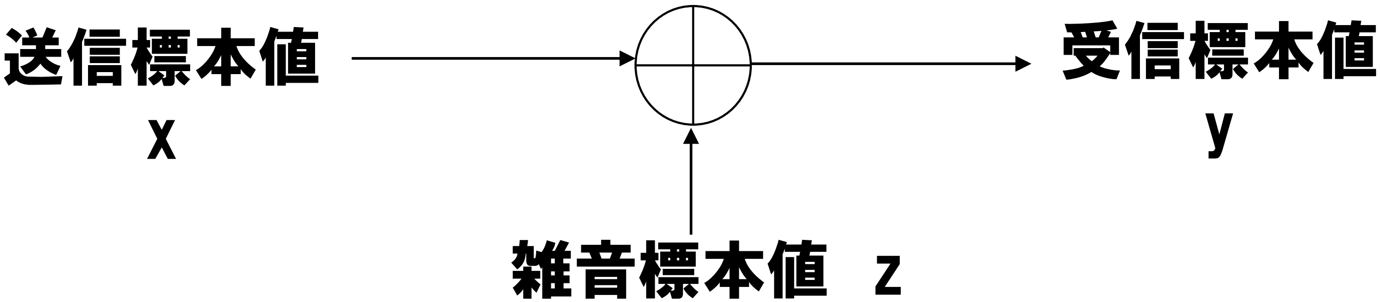
16.4 相互情報量 $I(x;y)$ の関係式

- $I(x;y)$ は様々な形で表わすことができる:

$$
\begin{aligned}
I(x;y) &= H(x) - H(x|y) \\
&= H(y) - H(y|x) \\
&= H(x) + H(y) - H(x,y)
\end{aligned}
$$

- 当然、$I(x;y) = I(y;x)$
- また、$I(x;y) \geqq 0$ も成り立つ。

16.4 相互情報量 I(x;y) の計算例



- 受信標本値 (y) が、送信標本値 (x) と雑音標本値 (z) の和であるとする: y=x+z
- **相加性ガウス通信路**
  - **雑音(z)がガウス分布**で与えられ、**送信信号(x)と雑音(z)は統計的に独立**とする。このような通信路を**相加性ガウス通信路**と呼ぶ。

$$p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}$$

16.4 ガウス通信路の相互情報量

- xの分布をガウス分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$$

- とすれば、yの分布もガウス分布となり、その分散は、次式で与えられる:

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2$$

- このとき、H(y)、H(y|x)、I(x;y)は次式で与えられる:

$$H(y) = \log_2 \sqrt{2\pi e(\sigma_x^2 + \sigma_z^2)}$$

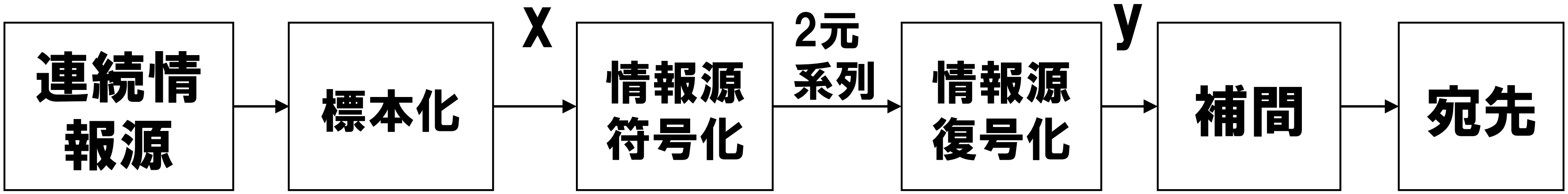
$$H(y \mid x) = H(z) = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma_z^2}$$

$$I(x;y) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_z^2}$$

実は、通信路容量に一致する

16.5 速度・ひずみ関数　（1）

- 連続情報源から発生する情報を標本化して、標本値を2元符号化する場合のモデルは、下図のとおり



１標本値あたりの平均符号長 $\geq R(D)$

平均ひずみdは
$d \leqq D$,　Dは与えられた値

- ひずみ無しに符号化することはできない
  - 各標本値は無限の情報量をもつため必ずひずみが伴う。
- ひずみを測るひずみ測度を $d(x, y)$ とする。平均ひずみdは次式で与えられる：
  - $p(x,y)$ は、連続情報源の標本値Xと、それを符号化し復号したYとの結合確率密度関数。

$$d = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d(x, y)p(x, y)dxdy$$

16.5 速度・ひずみ関数　(2)

- 速度ひずみ関数R(D)の定義
  - 平均ひずみ(d)を、与えられた値(D)以下に抑えるという条件のもとで、XとYの相互情報量I(X;Y)の最小値を速度ひずみ関数R(D)とする。

$$R(D) = \min_{d \le D} \left\{ I(X;Y) \right\}$$

- R(D)の性質・意味
  - 平均ひずみをD以下に抑える条件のもとで、標本値を2元符号化した時の、1標本値あたりの平均符号長の下限となる
    - どのような符号化をしてもR(D)より小さくはできない

16.5 白色ガウス情報源の速度・ひずみ関数

- 白色ガウス情報源に対する速度ひずみ関数を求める。
  - ひずみ測度d(x,y)を2乗誤差で定義する:
  - d(x,y) = (x−y)²
  - 確率密度関数p(x)は正規分関数の次式で与えられる:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} \quad , \qquad -\infty < x < +\infty$$

- 問題:平均ひずみ(d) ≦Dのもとでl(X;Y)を最小にする

$$d = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y\,|\,x)(x-y)^2 dxdy \le D$$

$$I(X;Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(y\,|\,x)\log_2\frac{p(y\,|\,x)}{p(y)}dy\right]dx$$

16.5 白色ガウス情報源の速度・ひずみ関数

- これを解いて、R (D) が次の式で求められる。

$$R(D) = \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma^2}{D} \ \text{(bit/sample)}$$

- R (D) は、D→0で無限大となり、ひずみ無しにするには無限大の符号長が必要であることを表す。D→分散値(σ²) 、で0に近づく。

16.6 連続通信路の通信路容量

- 連続通信路でも、送信記号Xと受信記号Y（一般的にベクトル）の相互情報量は、通信路の性質、即ち条件付確率 $p(y_1,y_2,\ldots,y_m|x_1,x2,\ldots,x_n)$ だけでは定まらない。Xの性質 $p(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ に依存する。
- 定義（**通信路容量**）

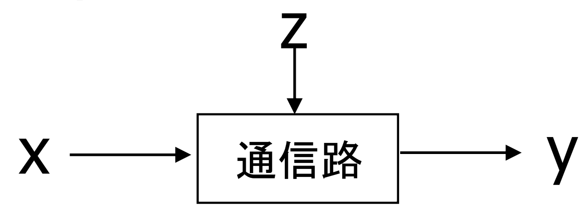
$$C = \max_{p(x_1,x_2,\ldots,x_n)} I(x;y)$$

は通信路の性質だけで決まる。これを**連続通信路の通信路容量**と呼ぶ。

16.6 通信路容量の例：ガウス通信路

- **平均電力が制限された相加性1次元ガウス通信路**
  - 入力信号をx, 出力信号をy, 雑音をzとする。y=x+zとなり、zはガウス分布とする。即ち、

$$p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\}$$



  - ここで、通信路の入力側でxの分散が σ_x^2 とする（通信路の入力抵抗を1Ω、xを電圧とすれば、σ_x^2 は平均送信電力を表わす）。これを平均電力が制限された**相加性ガウス通信路**と呼ぶ。
  - y=x+zなので、yの分散 σ_y^2 は $\sigma_y^2=\sigma_x^2+\sigma_z^2$ で与えられる。
  - I (x;y) =H (y) −H (y|x) であり、H (y|x) は通信路の性質で決まる次の量である。Y=x+zより, Xを知った時のyに関する曖昧性はzにより決まるので,

$$H(y\,|\,x)=H(z)=\log_2\sqrt{2\pi e\sigma_z^2}$$

ガウス分布のエントロピー
（p.20参照）

16.6 通信路容量の例：ガウス通信路

- 分散 σ_y^2 が与えられたとき、H (y) を最大にするには、xもガウス分布にすればよい。このとき、H (y) は最大値

$$H(y) = \log_2 \sqrt{2\pi e(\sigma_x{}^2 + \sigma_z{}^2)}$$

となり、従って、通信路容量Cは下記のようになる。

$$C = \max_{p(x)} I(x;y) = \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_z^2}$$

- σ_x^2 を信号電力S、σ_z^2 を雑音電力Nと考えると、上記式は、

$$C = \frac{1}{2}\log_2 \frac{S+N}{N} = \frac{1}{2}\log_2 (1+\frac{S}{N}) = \log_2 \sqrt{1+\frac{S}{N}}$$

- と書ける。

16.6 通信路容量の例：ガウス通信路

- さらに帯域制限された相加性ガウス通信路
  - 帯域が0～W [Hz] に制限されたガウス通信路とする。
  - 雑音は信号と統計的に独立で、単位帯域あたりN_0の電力密度をもつとする。通信路の全雑音電力は$N=N_0W$
  - 雑音もWに制限されている白色雑音であり、その $\frac{1}{2W}$ 毎の標本値は統計的に独立でガウス分布をなす。
  - 標本化定理により、$\frac{1}{2W}$ 毎に信号を$x_1,x_2,\ldots,x_n$とサンプリングし、送信すれば受信側信号も帯域制限されて、標本値$y_1,y_2,\ldots,y_n$が得られる。
  - $y_i=x_i+z_i$,　$i=1,2,\ldots,n$　で、$z_1,z_2,\ldots,z_n$はそれぞれ分散$N=N_0W$の独立なガウス分布をなす。

16.6 通信路容量の例：ガウス通信路

- 各標本値あたり $\frac{1}{2}\log_2(1+\frac{S}{N})$

の最大情報量を運んでいる。

単位時間の標本値の個数は2W（Wは帯域）なので、
通信路容量として、

$$C = \frac{2W}{2}\log_2(1+\frac{S}{N}) = W\log_2(1+\frac{S}{N}) \quad [\text{bit/sec}]$$

が得られる。時間 Tの間に運べる情報量は、

$$T \times C = T \times \frac{2W}{2}\log_2(1+\frac{S}{N}) = TW\log_2(1+\frac{S}{N}) \quad [\text{bit}]$$

16.6 通信路容量の解釈：ガウス通信路

- 通信容量が、時間（T），帯域（W），品質（S/N）、で決まることを示す。
  - 時間が長いほど伝送できる情報量は多い
  - 帯域が広いほど伝送できる情報量は多い
  - S/Nが高いほど伝送できる情報量は多い

17. 連続通信路における符号化と離散情報の伝送

17.1 信号空間
17.2 連続通信路の符号化定理
17.3 連続通信路における離散情報の伝送

17.1 信号空間

- 連続通信路の通信路容量(C)は、

  C=W log ₂ (1+P/N) [ビット/秒]

  で与えられる。W:信号の帯域[Hz]、P:平均信号電力、N:全雑音電力。

  この通信路容量(C)の持つ意味について述べる

- 帯域(W)の信号f(t)を 時間長(T)の範囲でフーリエ級数展開すると、

$$f(t) = a_0\frac{1}{T} + \sum_{n=1}^{WT}\left(a_n\sqrt{\frac{2}{T}}\cos n2\pi f_1 t + b_n\sqrt{\frac{2}{T}}\sin n2\pi f_1 t\right)$$

ただし、$f_1 = \frac{1}{T}$

17.1 信号空間

- f (t) はa_0, a_1, b_1, a_2, b_2,…, a_{WT}, b_{WT}の2WT+1個の係数で表される。即ち、f (t) は2WT+1次元空間の点と1対1に対応する。
- さらに、
  - $\int_0^T f^2(t)dt = {a_0}^2 + \sum_{n=1}^{WT}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right)$

  を証明することができる。
- こうして、f (t) のエネルギーは、これに対応する2WT+1次元空間の点(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2,…, a_{WT}, b_{WT})の原点からの距離の2乗で表される。
- 信号空間とは、「帯域幅W、時間長Tの信号f (t) と1対1に対応する2WT+1次元空間」のことを言う

17.2 連続通信路の符号化定理

- 連続通信路においても、離散通信路と同様な符号化定理を証明することが出来る。特に、通信路を「帯域制限相加性ガウス通信路」と仮定した時の符号化定理を示す。

【定理】

- 帯域制限相加性ガウス通信路において、雑音は白色であり、その全電力はN、帯域はWとする。また許容平均信号電力をPとする。Cを通信路容量とする。
- (1) R<Cとしたとき、この通信路を通して、平均R [bit/sec]の速度で2元情報を、任意に小さい誤り率で伝送できる符号化が存在する。
- (2) R>Cとしたとき、この通信路を通して、平均R [bit/sec]の速度で2元情報を、任意に小さい誤り率で伝送できる符号化は存在しない。

証明：略

17.3 連続通信路における離散情報の伝送

- 連続通信路の通信路容量(C)は、

$C=W\log_2(1+P/N)$ [ビット/秒]

で与えられる。W:信号の帯域[Hz]、P:平均信号電力、N:全雑音電力。

通信路は相加性白色ガウス雑音を仮定して、その雑音電力スペクトル密度をN_0とすれば、$N=N_0W$ となる。

これを上の式に代入すると、

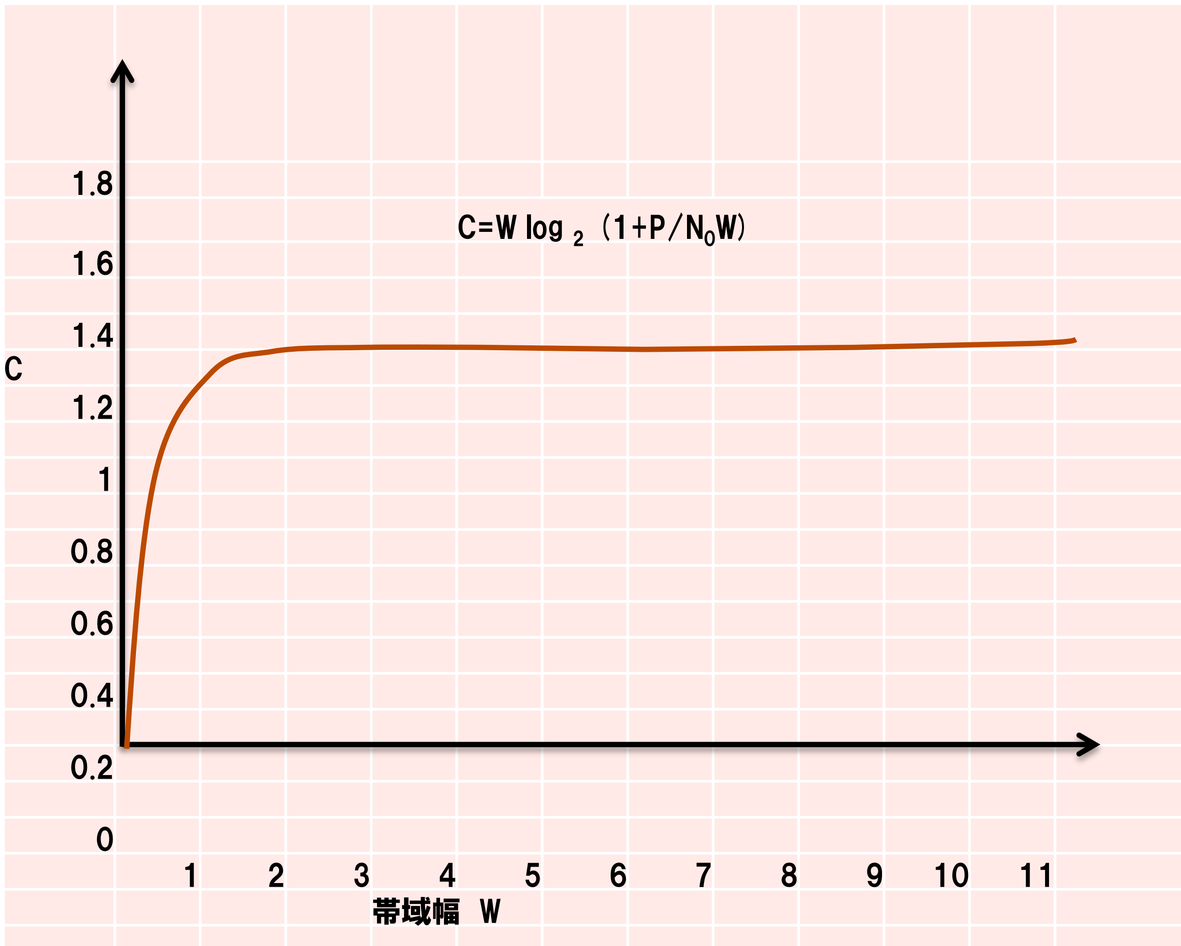
$C=W\log_2(1+P/N_0W)$ [ビット/秒]

が得られる。

この式から、Cは信号電力 Pが大きいほど、また雑音電力スペクトル密度N_0が小さいほど大きい。

17.3 連続通信路における離散情報の伝送

- CをWの関数として図示すると下記の通り:



17.3 連続通信路における離散情報の伝送

- $C = W \log_2 (1 + P/N_0 W)$ [ビット/秒]

  で、W→∞のCの極限値は、

  $C = (P/N_0) \log_2 e$

  となる。

  すなわち、帯域幅がいくらでも使えるときでも、Cは有限でありP/N_0の1.44倍で与えられる。

18. 連続通信路における連続情報の伝送

18.1 ひずみ
18.2 情報伝送速度－ひずみ関数
18.3 ガウス情報源の情報伝送速度－ひずみ関数
18.4情報伝送速度－ひずみ関数に関する基本定理

18.1 ひずみ

- 連続情報源では信号が連続的に分布するので、完全に正しく伝送するには無限の通報が必要であり、実際には不可能
  - 完全な伝送のためには波形の数値を表すにも無限の桁数が必要であるが、通信路容量 Cの通信路では Cを超える伝送速度 Rで誤りなく伝送することは不可能である。【通信路符号化定理】
- ひずみ
  - 情報源からの信号標本値を x とする。これが受信側で y として受信された時、d (x, y), なる歪が生じたと考える。
  - 例1：2乗平均誤差　$d(x, y) = (y-x)^2$
  - 例2：絶対誤差　$d(x, y) = |y-x|$

18.2 情報伝送速度-ひずみ関数

- 条件付き確率 p (y|x) が与えられた通信路において、入力 x と出力 y との相互情報量を、この通信路の情報伝送速度 R と呼ぶ。
  - $\mathrm{R} = \iint p(x,y) log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} dxdy$

  Rはp (x) , p (y|x) により計算できる。
- 平均歪 Dが一定値の条件で、Rの最小値を考えると、RはDの関数 R (D) となり、レートディストーション関数(情報伝送速度-ひずみ関数)と呼ぶ。即ち、
  - $D = \iint p(x,y) d(x,y)\, dxdy$

  なる制約のもとで、
  - $\mathrm{R(D)} = \min_{p(y|x)} \iint p(x,y) log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} dxdy$

  を求めればよい。

18.3 ガウス情報源の情報伝送速度−ひずみ関数

- 入力信号 x がガウス分布をするとき、
  - $R = min[H(x) - H_y(x)] = \mathrm{H(x)} - \mathrm{max}H_y\mathrm{(x)}$

となる。ここで、平均歪

D=$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\ (x-y)^2 dxdy = N$

の条件の下では、$H_y\mathrm{(x)}$は (y−x) が同じくガウス分布をするときに最大となる。このとき、

R=$log_2\sqrt{2\pi eQ}$−$log_2\sqrt{2\pi eN}$=$\frac{1}{2}\,log_2\frac{Q}{N}$

が得られる。これがD=NのときのRの値。Qはxの分散。情報源が帯域Wのとき、標本値が毎秒2W個発生するので、次の定理が導かれる。

【定理】

- 帯域 W の白色ガウス情報源があり、この平均電力をQとする。許容ひずみとして雑音電力を取り、これを N とすれば、この情報源の情報発生速度 R は、次の式で与えられる。
- $R = W\ log_2\frac{Q}{N}$

18.4情報伝送速度-ひずみ関数に関する基本定理

【定理】

ひずみ D における情報発生速度 R の情報源が与えられたとする。このとき、

- $C \geq R$なる通信路容量 C の通信路を用いて、この情報源信号をひずみDで伝送することができる。
- $C < R$なる通信路容量の通信路では、この情報源信号はひずみD以下で伝送することができない。