

情報理論(No.11)

2016/12/3

今後の講義予定

12/10 :通常(第12回)

12/17 :通常(第13回)

1/7 :通常(第14回)

1/14 :センター試験のため休み

1/21 :試験(第15回)

講義目次

- **14. 連続情報源と連続通信路**
 - 14.1 情報の符号化モデル
 - 14.2 連続的情報源
 - 14.3 アナログ情報のデジタル表現法
 - 14.4 デジタル化(AD変換)の概念
 - 14.5 標本化 (Sampling)
 - 14.6 量子化 (Quantization)
 - 14.7 連続情報(連続信号)の確率的扱い
 - 14.8 連続情報と離散情報の表現法の違い
 - 14.9 確率分布について
 - 14.10 連続通信路
 - 14.11 各種のエントロピー

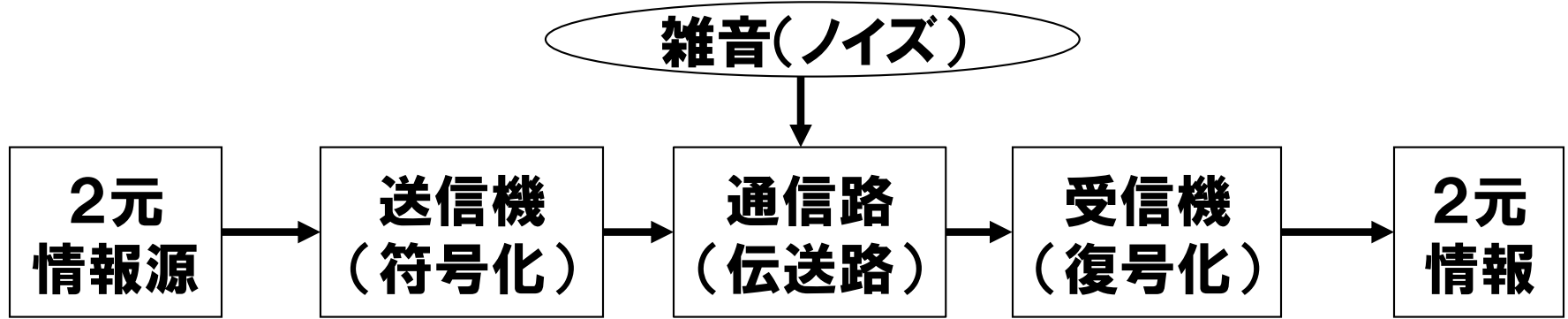
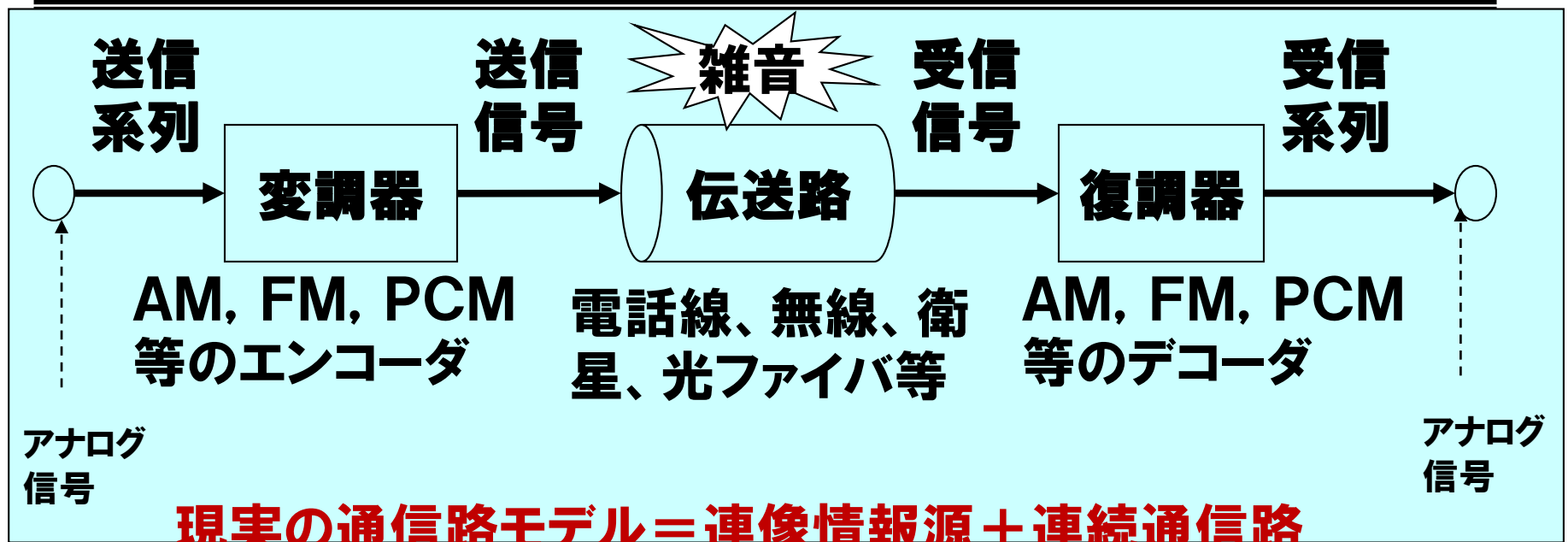
講義目次

- **15. 標本化定理**
 - **15.1 時間的に連続な通信路**
 - **15.2 信号の直交展開**
 - **15.3 直交展開とフーリエ級数**
 - **15.4 帯域制限信号**
 - **15.5 標本化定理**
 - **15.6 標本化関数のグラフ**
 - **15.7 標本化定理による帯域制限信号の展開**
 - **15.8 標本化定理の証明**

14. 連続情報源と連続通信路

- 14.1 情報の符号化モデル
- 14.2 連続的情報源
- 14.3 アナログ情報のデジタル表現法
- 14.4 デジタル化(AD変換)の概念
- 14.5 標本化 (Sampling)
- 14.6 量子化 (Quantization)
- 14.7 連続情報(連続信号)の確率的扱い
- 14.8 連続情報と離散情報の表現法の違い
- 14.9 確率分布について
- 14.10 連続通信路
- 14.11 各種のエントロピー

14.1 情報の符号化モデル



2元データ通信路モデル

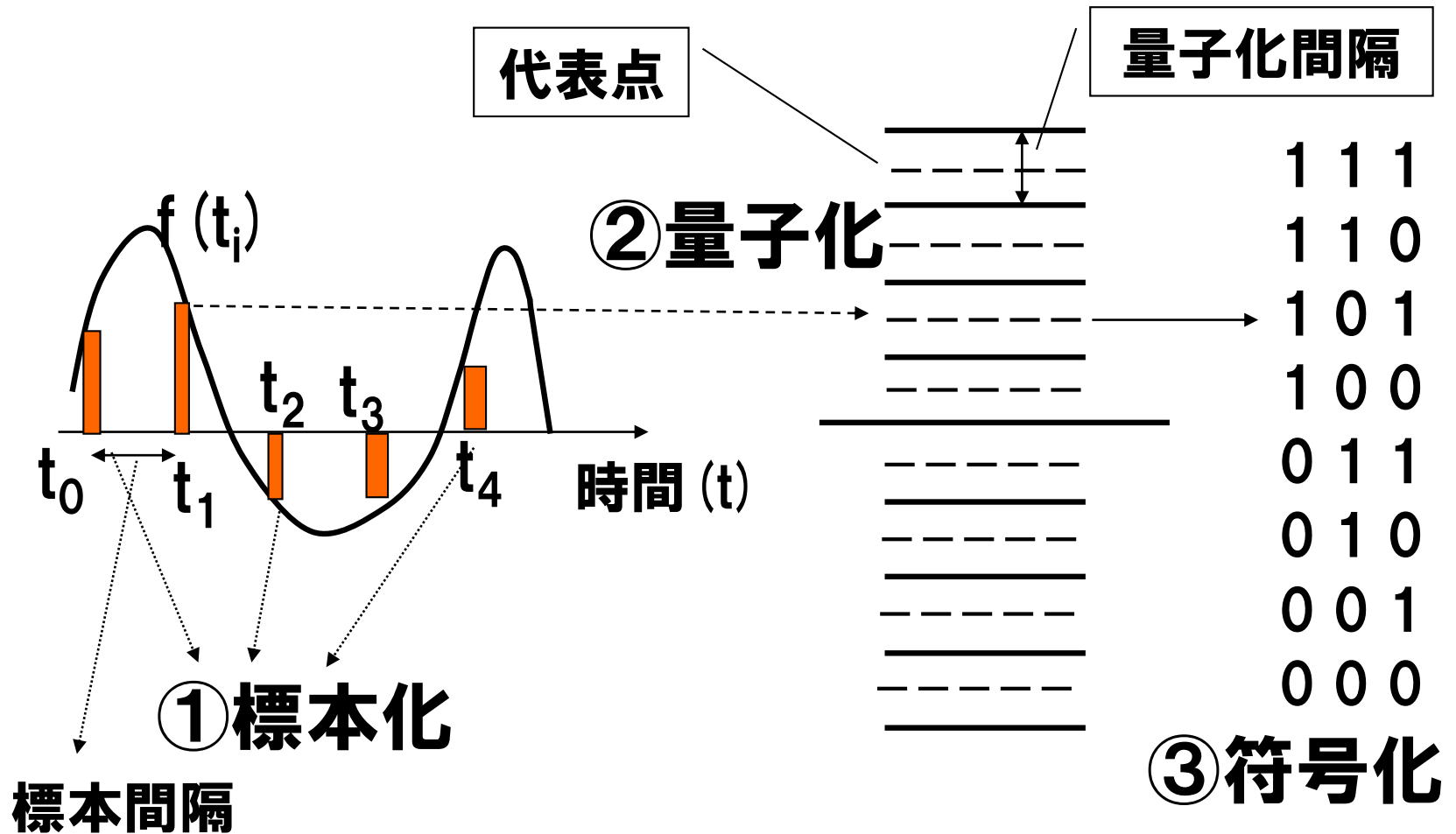
14.2 連続的情報源

- デジタル値(数値や離散的記号)で表せないアナログ情報を、**連続的情報**または**連続情報**と呼ぶ
 - 自然界に存在する情報、人が作り出す直接的情報はほとんど連続的情報
 - アナログ温度計の気温、アナログ時計の時刻、レコードの音楽の音、VHSやLDの映像、・・・
- 時間的に連続して発生する連続的情報を、**連続信号**と言うこともある
 - 連続信号は通常、時間変数(t)を引数とする関数(例: $f(t)$)で表現される
- アナログ情報とデジタル情報の違い
 - アナログ情報は、アナログ量で完全に写し取ることができる(表現の完全性)
 - しかし、アナログ情報をデジタル量で完全に表現することは殆ど不可能
 - 例:長さが5.2cmのものは、 $1/100$ cm (=0.1 mm) 以下は省略したことになる。
 - デジタル量はコンピュータでの処理が容易であり、アナログ情報をデジタル量で表すことが多いが、デジタル量は本来的に約束で表すので、これを明確にすることが重要

14.3 アナログ情報のデジタル表現法

- 3つの操作(**標本化 + 量子化 + 符号化**)が必要
 - 3つを総称して**AD (Analogue-to-Digital) 変換**という
- **(1) 標本化 (サンプリング, Sampling)**
 - 時間的に飛び飛びにアナログ情報 (波形) を切り出すこと
- **(2) 量子化 (Quantization)**
 - 上記で切り出した値を、それぞれ適当な代表点で代表させること。
 - 直線 (linear, 線形) 量子化
 - 一定間隔で分布する代表点で表す場合
 - 非直線 (nonlinear, 非線形) 量子化
 - 一定間隔でなく分布する代表点で表す場合
- **(3) 符号化 (Coding, Encoding)**
 - 上記の代表点を0, 1の組合せで表すこと
- 逆操作を**DA (Digital-to-Analogue) 変換**という

14.4 デジタル化(AD変換)の概念



標本値 $f(t_1)$ は, 101 に符号化される

14.5 標本化 (Sampling)

- 連続情報源は、 $x(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) なる連続信号を発生するもの
 - 時間的に変わらない連続情報源(例:写真など静止画)もあるが、通常は音声・映像など時間的に変化する情報が多いため、これら連続信号を扱う。
- $x(t)$ の飛び飛びの時点における信号値を標本値と呼ぶ。特に、等間隔に飛び飛びの時点を取り出す操作を標本化と呼ぶことが多い。

$$\dots -x(-2T), x(-T), x(0), x(T), x(2T), \dots$$

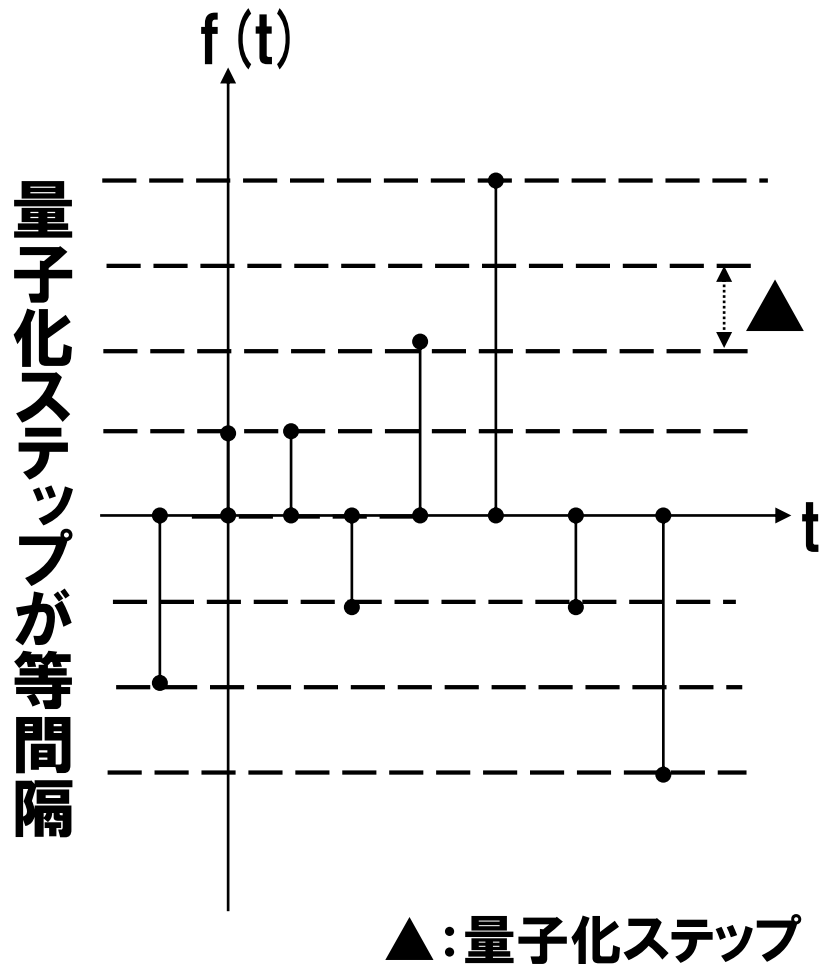
T を標本間隔, T の逆数 ($f_s = 1/T$) を標本化周波数、という。

- 逆に、標本系列 $x(nT)$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) からもとの連続信号 $x(t)$ を復元することを補間(interpolation)と呼ぶ。
 - 補間を完全に行うためには、標本間隔はある程度密にとらなければならない。
⇒標本化定理

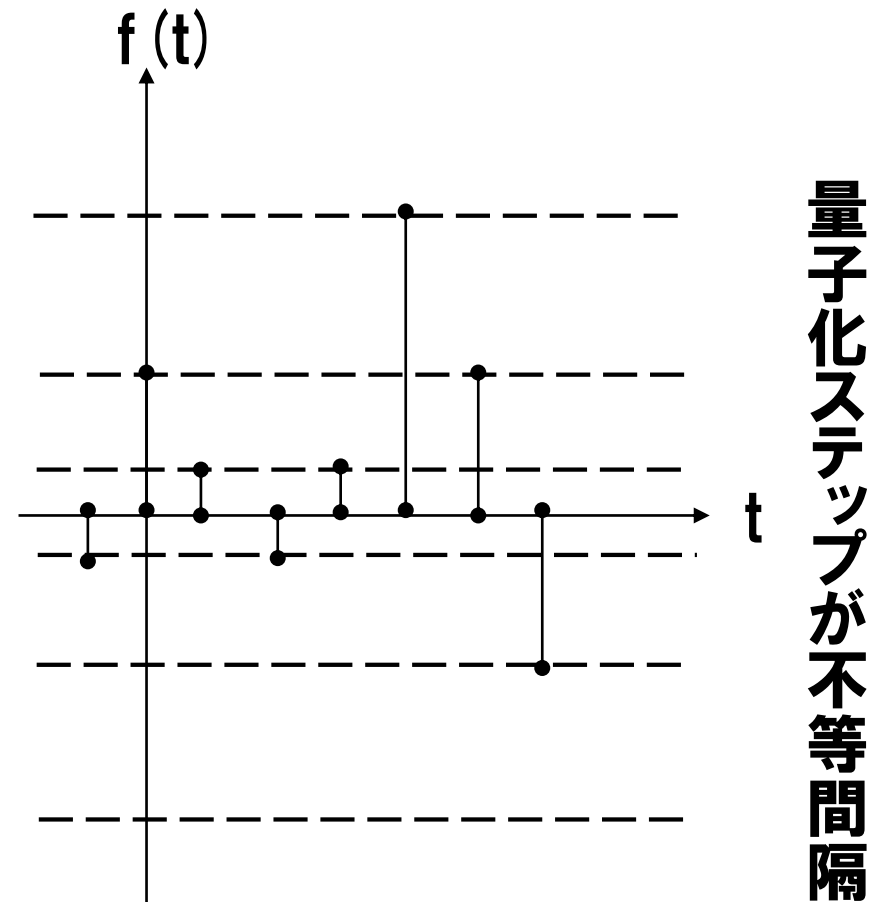
14.6 量子化 (Quantization)

- 標本値の振幅範囲を複数個の区間に分割し、それぞれの区間に属する**標本値をその代表値で置き換える**操作
- 量子化の種類
 - **線形量子化**(区間を均等にとる量子化)
 - 一様量子化、均一量子化、とも言う。
 - **非線形量子化**(区間が均等でない量子化)
- 線形量子化の場合、標本値 x が、 $x_i - \Delta / 2 \leq x < x_i + \Delta / 2$ のとき、 x を x_i に置き換える。 Δ は量子化区間の幅で、**量子化ステップ**と呼ぶ。
- 量子化雑音
 - もとの連続標本値と量子化標本値の間に誤差が生じる。この誤差を**量子化雑音**と呼ぶ。

14.6 線形量子化と非線形量子化



(a) 線形量子化



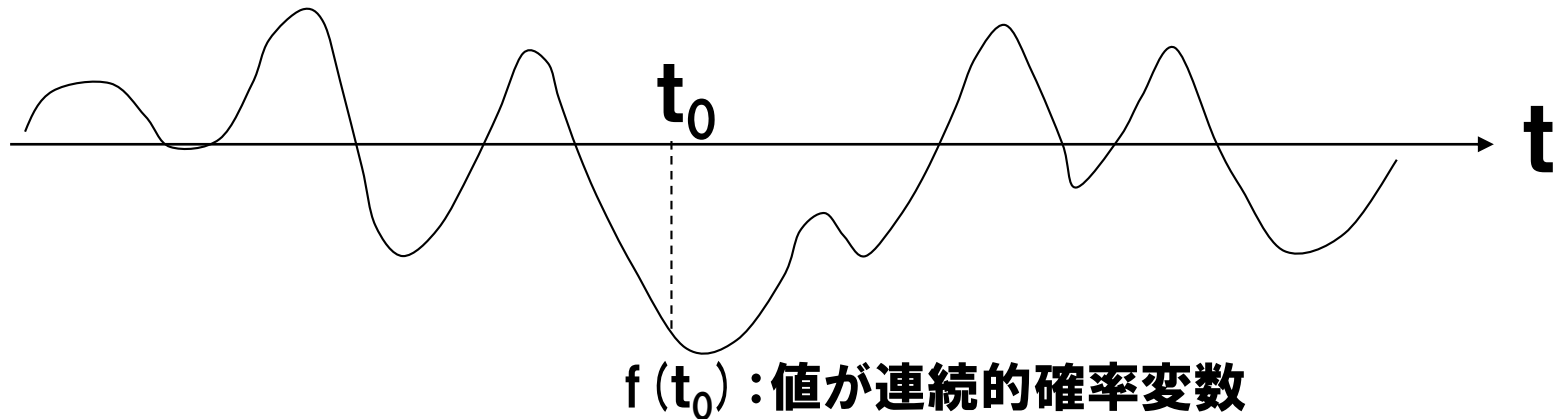
(b) 非線形量子化

14.7 連続情報(連続信号)の確率的扱い

- ・ 不連続信号は、各信号(記号ともいう) x_i の**発生確率** $p(x_i)$ で情報源が定義され、記号系列は確率的に発生する(下の例)
- ・ 連続信号は、時刻 t_0 における**値が確率変数**(一定の規則で変動する値)と見なされ、任意の t_0 に対して値を持つ**確率過程**として情報源が定義される。

晴 雨 晴 曇 雨 雨 曇 晴 晴 雨 雨 曇

(a)不連続信号(デジタル信号)



(b)連続信号(アナログ信号)

14.8 連続情報と離散情報の表現法の違い

- これまで対象にしてきた「離散(デジタル)情報」と今回対象にする「連続(アナログ)情報」は下記の差異がある:

比較項目	連続(アナログ)情報	離散(デジタル)情報
統計的性質	結合確率密度関数で特徴づけられる	結合確率分布(各シンボルの確率値の積)で特徴づけられる
計算式	積分(不定積分、定積分)	和、 Σ 演算
条件付確率	条件付確率密度関数	条件付確率分布
エントロピー	確率密度関数に関する平均値(積分)で定義	確率分布に関する平均値(和)で定義

14.9 確率分布について

- **連続情報源、および連続通信路の性質は、確率分布により決まる。(分布が与えられれば、性質がわかる)**
- **確率分布は数学の確率論で定義されるが、情報理論では、その一部の概念を利用する。**

14.9 確率変数と確率分布

- **確率変数**

- 値が確率的に与えられる変数

- 取りえる値が離散的な場合は離散的確率変数、値が連続的な場合は連続的確率変数、と呼ぶ。変数を X で表わすと、 X が特定の離散値 k しか取らない場合、即ち $\Pr(X=k)$ しか定義されない場合が離散変数であり、 k が連続集合(実数値等)の要素の場合が連続変数となる。

- **確率分布**

- 確率変数 X に対する関数値 $\Pr(X)$ は確率となるが、その取る値の集合 $\{P(X)\}$ を確率分布という。 X が離散的確率変数ならば、 $\{P(X)\}$ は離散確率分布、 X が連続的ならば $\{P(X)\}$ は連続確率分布と呼ぶ。
 - 離散的確率変数、確率分布は既に多くの事例を説明してきた。
 - 例:さいころ振りの場合、 $X=1,2,3,4,5,6$ をとり、 $P(X=k)=1/6$, $k \in \{1,2,...,6\}$ などとなる。

- **基本的な離散確率分布**

ベルヌーイ分布、2項分布、ポアソン分布、負の2項分布、 など

14.9 基本的な離散確率分布：ベルヌーイ分布

- **ベルヌーイ(Bernoulli)分布**: $\text{Be}(p)$
 - 例:さいころ投げ
 - 1回投げた時、6の目が出ると成功、それ以外の目が出ると失敗
 - 一般的定義:
 - 成功か失敗の2つの結果しかない試行において、成功確率 p のものを表わす。
 - 確率変数 X が、 $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$ となる p, q について、 $P(X=1) = p$, $P(X=0) = q = 1 - p$ を満たすこと。

$$P(X = r) = p^r (1 - p)^{1-r}, r = \{0, 1\} \quad (\text{一般式})$$

- **ベルヌーイ(Bernoulli)試行**
 - 「AかBのどちらかしか起こらない」、「yesかnoのどちらかしかかない」、「表と裏のどちらかしか起こらない」といった事象(これをベルヌーイ型の事象と呼ぶ)を起こさせること

14.9 基本的な離散確率分布：2項分布

- **2項分布** $B(n, p)$

- **例**

- さいころ投げの場合、 n 回さいころを独立に投げた時、6の目が出た回数
- 全住民の5%がある感染症に罹患しており、その中から無作為に500人を抽出する。このとき、抽出された集団の中に罹患者が30人以上いる確率 $[n=500, p=0.05, k=30]$

- **一般的定義**

- n 回のベルヌーイ試行における成功の回数
- 確率変数 X の分布が、パラメータ n, p の2項分布 $B(n, p)$ とは、 $p > 0, q > 0, p + q = 1$ について、 $P(X=k) = {}_n C_k p^k q^{n-k}, k=0, 1, \dots, n$ を満たすこと。確率変数の全ての取りえる値についての総和は、2項展開により1となる

$$\sum_{k=0}^n {}_n C_k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$$

14.9 基本的な離散確率分布：ポアソン分布

- ポアソン分布

- 例

- さいころ投げで、6の目の出る確率が1/100という「インチキ」さいころを独立に200回投げた時、6の目の出た回数
- 1日にかかってくる電話の回数、受け取る電子メールの数
- ある交差点を通過する車の数、
- ある地域における火災件数、
- 道路沿いにある1Kmあたりのレストランの数

- 一般的定義

- Xが{0,1,2,...}を値にとる確率変数とし、Xの確率分布がパラメータλをもつポアソン分布とは、

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすこと。

- 特徴

- 1つ1つの起きる確率は小さいが、その試行が独立にたくさん行われる場合に表れる。

14.9 基本的な離散確率分布：負の2項分布

- 負の2項分布

- さいころ投げの例で、

- 何回も独立に投げたとき、6の目が4回出たとき、それまでに6の目以外が出た回数

- 一般的定義

- T を $\{0, 1, 2, \dots\}$ の値をとる確率変数とし、 T の確率分布がパラメータ n, p をもつ負の2項分布であるとは、

$$P(T=k) = {}_{n+k-1}C_{n-1} p^n q^k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つこと。ここで、 $p > 0, q > 0, p + q = 1, n$:正整数

- 独立に成功確率 p のベルヌーイ試行を何回も行うとき、はじめて n 回成功するまでに失敗した回数。

14.9 連続確率分布と確率密度

- **連続確率分布**

- 任意の x について、 $P(X=x)=0$ となるような確率変数 X の分布を連続確率分布という。
 - 特定の1点をとると、その確率は0となるもの。
 - $X=x$ を中心とする任意の幅 Δ を取る確率は $p(x)\Delta$ となる、 $p(x)$ が定義できる。

- **確率密度**

- 連続的確率変数 x が、任意の微小区間を取る確率を表わす $p(x)$ を確率密度と呼ぶ。 x の関数と考えると確率密度関数という。

$$p(x) \geq 0$$

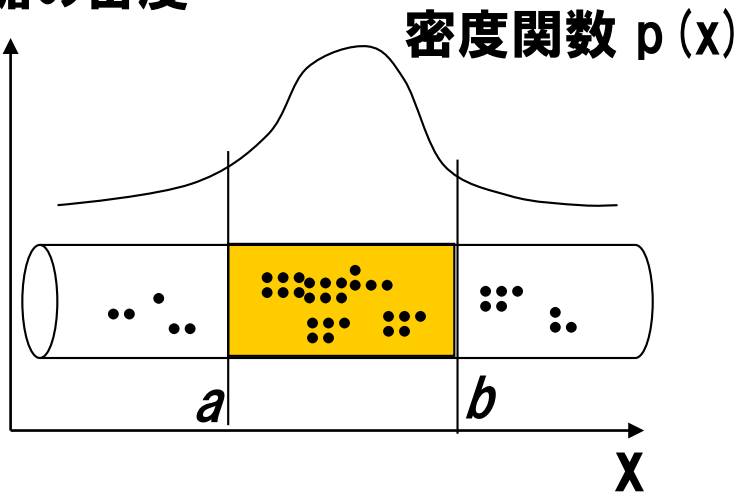
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

- **確率密度のイメージ**

- 砂糖の混じり方が不均質の棒ようかんの、砂糖の割合

14.9 確率密度:イメージと代表例

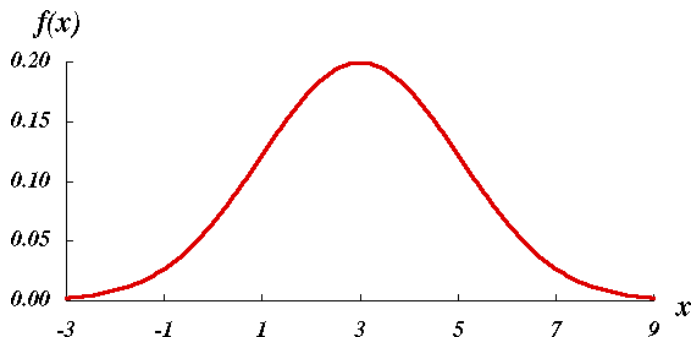
砂糖の密度



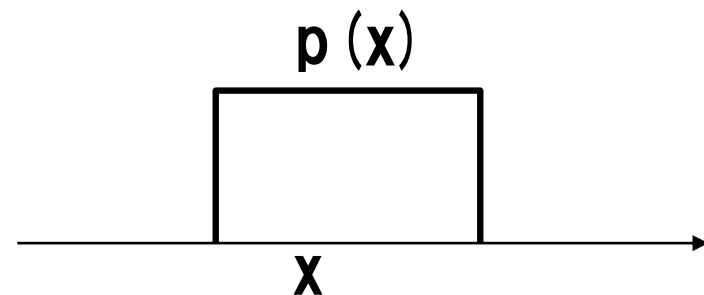
$a \leq x \leq b$ の区間を切り取った部分の砂糖の量は、

$$\int_a^b p(x) dx \quad \text{となる。}$$

砂糖の量	$\Rightarrow$ 確率
$p(x)$	$\Rightarrow$ 確率密度

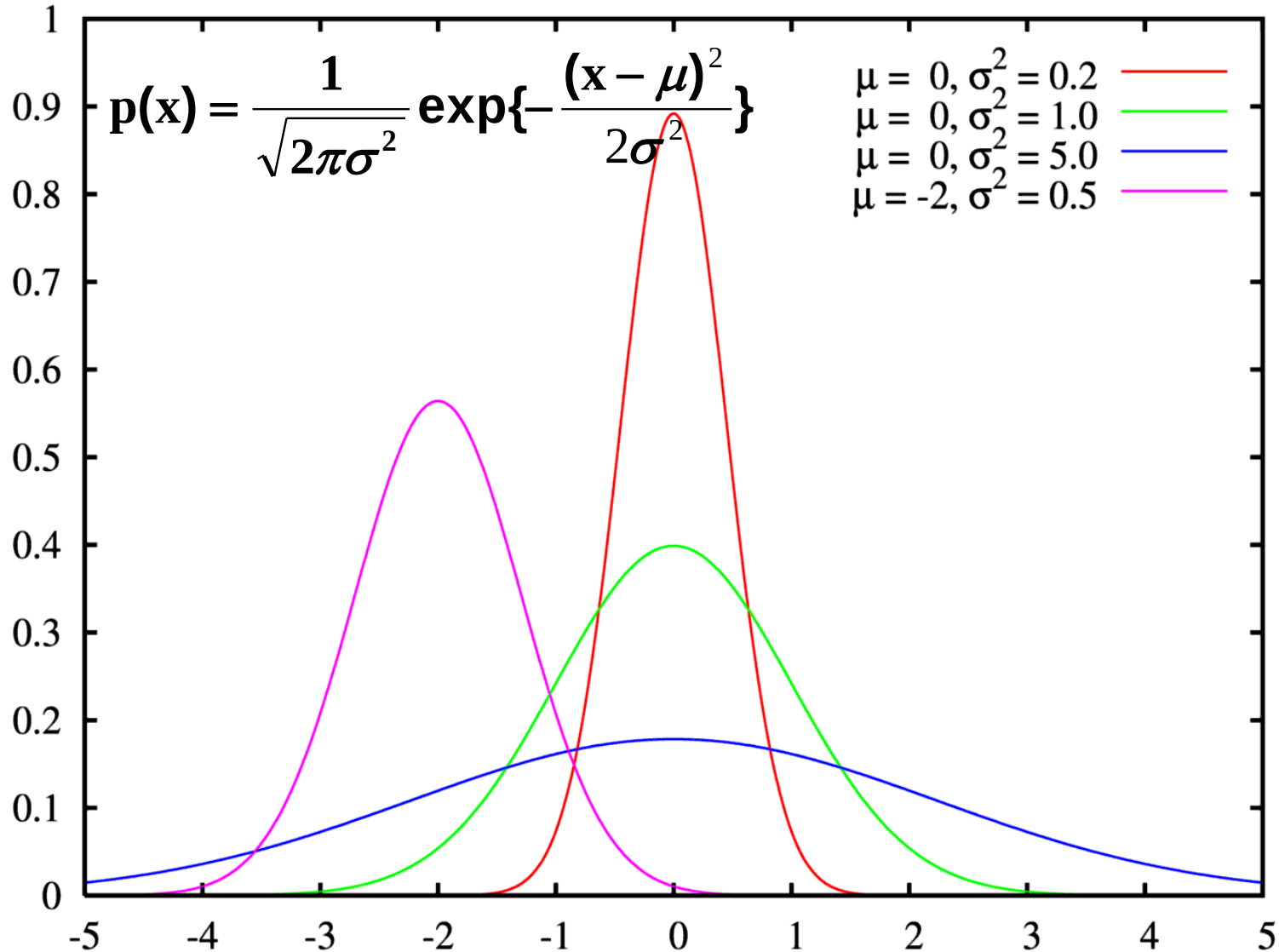


正規分布(ガウス分布)

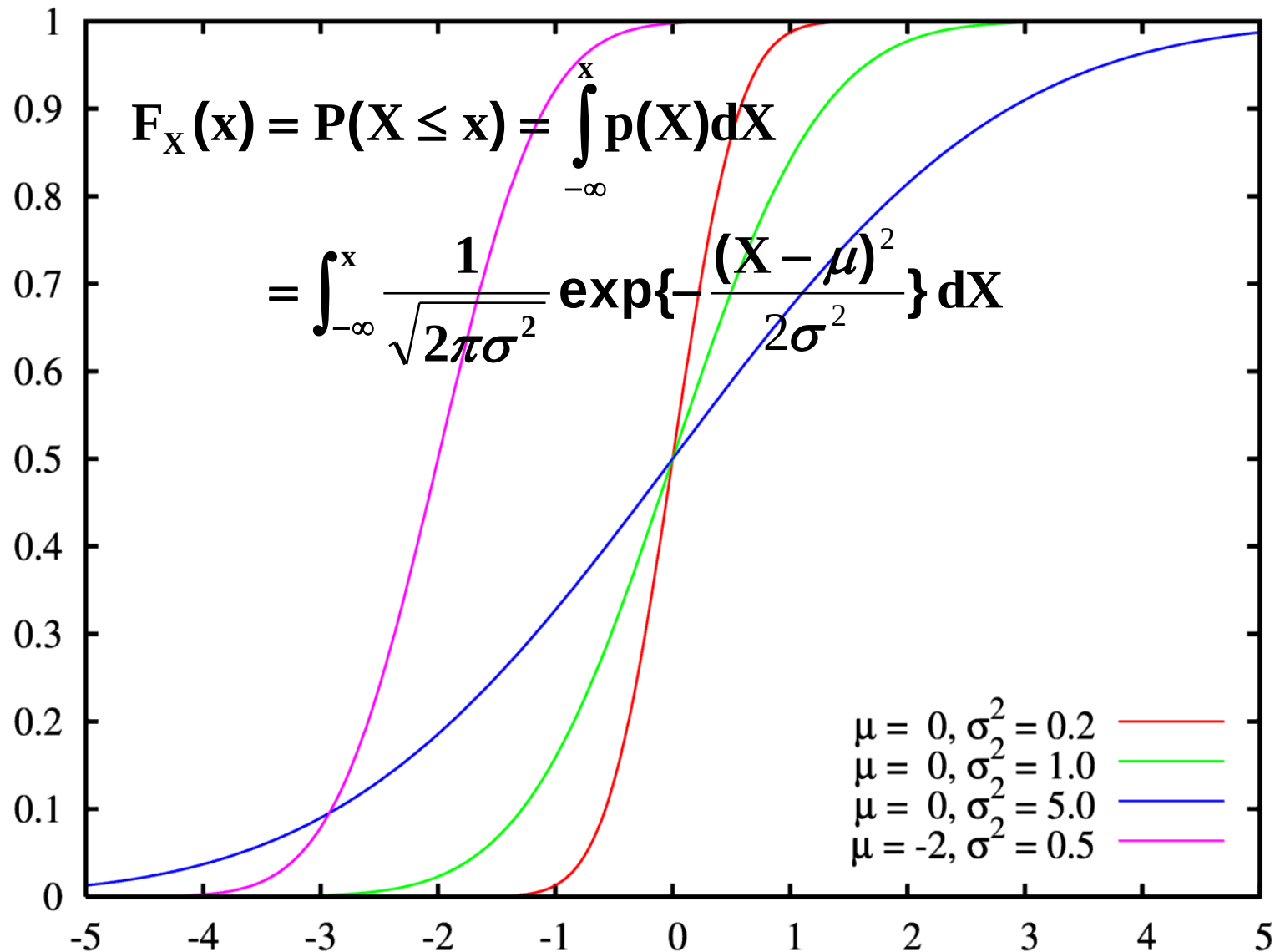


一様分布

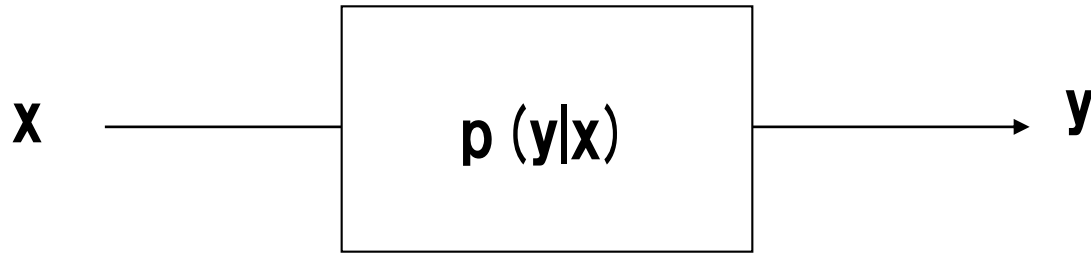
14.9 ガウス(正規)分布の確率密度関数



14.9 ガウス(正規)分布の累積分布関数

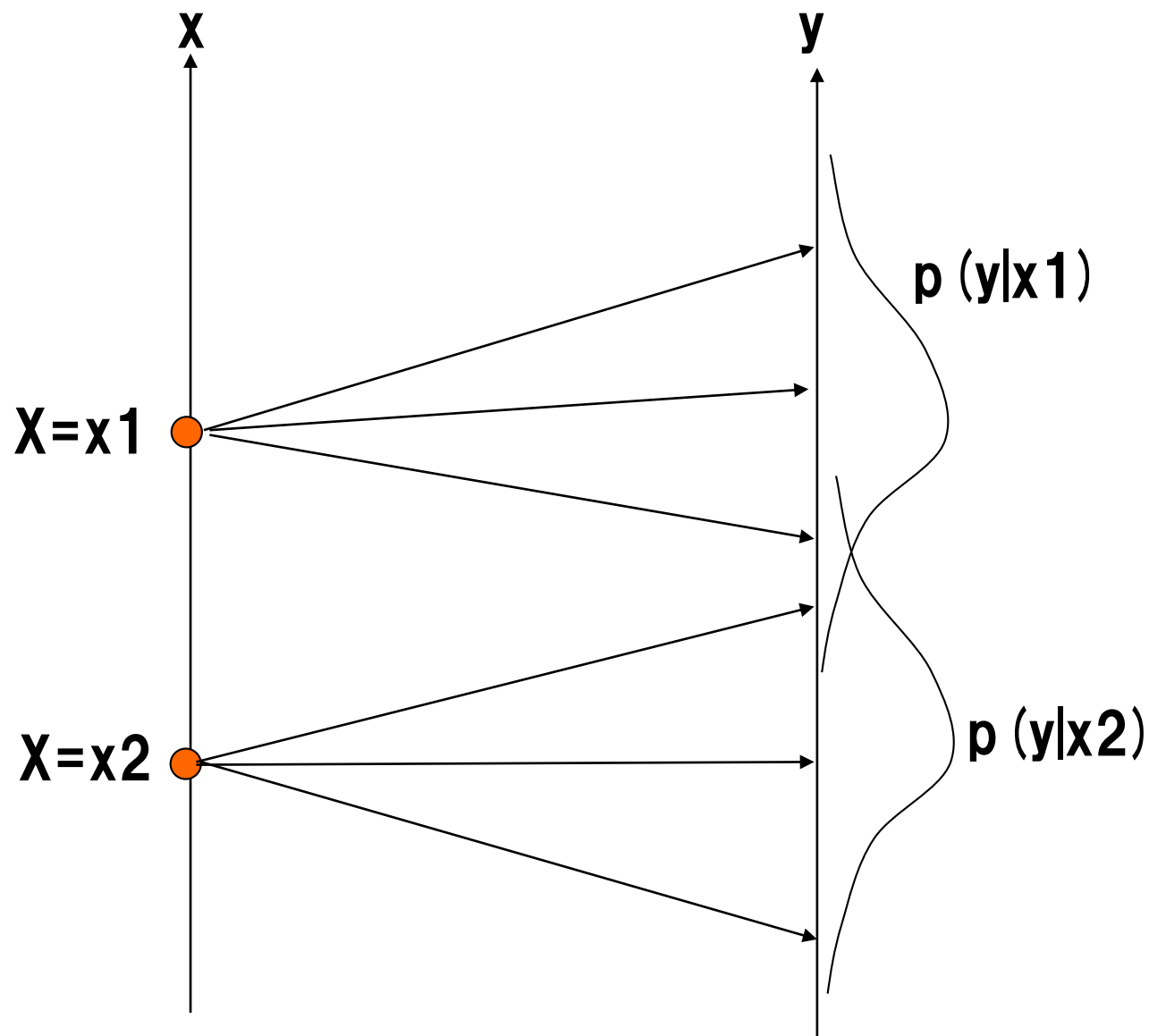


14.10 連続通信路



- 連続的値をとる入力 x のときに出力が y となる条件付確率密度関数 $p(y|x)$ で**連続通信路**が定義される。
- 条件付確率密度関数の意味
 - x は連続的値をとるが、特定の x_1, x_2 をとった場合、 y をとる確率は分布関数 $p(y|x_1), p(y|x_2)$ として与えられる。
 - 特定の y_1, y_2 を取る確率 $p(y_1|x_1), p(y_2|x_1)$ などはゼロであるが、ある連続区間をとると確率を与える。

14.10 条件付確率密度関数: $p(y|x)$



14.10 各種の確率密度関数

- **結合確率密度関数: 2つの確率変数の組に対する確率密度**

$$p(x, y) = p(x)p(y | x)$$

- **出力確率密度関数: 出力変数 y の確率密度**

$$p(y) = \int p(x)p(y | x)dx$$

- **事後確率密度関数: 出力変数 y を与えた時の入力変数の確率密度**

$$p(x | y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

14.11 各種のエントロピー

- **事前エントロピー**

$$H(x) = -\int p(x) \log_2 p(x) dx$$

- **出力エントロピー**

$$H(y) = -\int p(y) \log_2 p(y) dy$$

- **結合エントロピー**

$$H(x, y) = -\iint p(x, y) \log_2 p(x, y) dx dy$$

- **条件付エントロピー**

$$H(y | x) = -\iint p(x, y) \log_2 p(y | x) dx dy \quad \text{.....散布度}$$

$$H(x | y) = -\iint p(x, y) \log_2 p(x | y) dx dy \quad \text{.....曖昧度}$$

15. 標本化定理



15.1 時間的に連続な通信路

15.2 信号の直交展開

15.3 直交展開とフーリエ級数

15.4 帯域制限信号

15.5 標本化定理

15.6 標本化関数のグラフ

15.7 標本化定理による帯域制限信号の展開

15.8 標本化定理の証明

15.1 時間的に連続な通信路

- 連続的情報のうち、時間の連続的な値に対して定義された情報、すなわち**時間連続信号**を特に扱う。
- このような信号を、時々刻々の値を表にして表現することは不可能。
- 従って、信号をある関数系で展開し、その展開係数で表現する方法が考えられる。
 - 特に関数系 $\varphi_i(t) (i = 1, 2, \dots)$ として、次の性質を満たすものを用いると便利である。

$$\int_{T_1}^{T_2} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \delta_{ij}$$

- ここで、積分区間 $[T_1 \ T_2]$ は今注目している時間範囲で、 δ_{ij} は**ディラック (Dirac) のデルタ記号**と呼ばれる。

15.1 時間的に連続な通信路

- δ_{ij} の性質：
 i と j が一致するときのみ1、それ以外は0をとる。
- 上記の $\varphi_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots$)を正規直交関数系とよぶ。

15.2 信号の直交展開

- 直交関数系により信号 $f(t)$ を展開することを、直交展開と呼ぶ。

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t), \quad T_1 < t < T_2$$

- ここで、係数 a_i は次の式で表される。

$$a_i = \int_{T_1}^{T_2} f(t) \varphi_i(t) dt$$

- このような直交展開により、連続信号が a_i ($i=1,2,\dots$) なる数列で代表されることになる。

15.3 直交展開とフーリエ級数

- 三角関数系

$$\sqrt{\frac{1}{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n2\pi f_1 t, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n2\pi f_1 t, \quad n = 1, 2, \dots$$

は、区間 $[-T/2, T/2]$ の範囲で正規直交関数系をなす。ここで、 $f_1 = 1/T$ である。この関数系を三角関数系と呼ぶ。

- フーリエ級数

- 一般に信号 $f(t)$ を周期関数とし、 $|f(t)|^2$ の1周期にわたる積分が有限とする。すなわち、

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1)$$

とする。式(1)を満たす $f(t)$ を三角関数系で展開したとき、展開級数の値と関数自身 $f(t)$ の値は、 $f(t)$ の不連続点を除き一致することが分かっている。

- 即ち、 $f(t)$ は不連続点を除き次の式で表現できる。

15.3 直交展開とフーリエ級数

$$f(t) = a_0 \sqrt{\frac{1}{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n2\pi f_1 t + b_n \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n2\pi f_1 t) \quad (2)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sqrt{\frac{1}{T}} dt \\ a_n &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n2\pi f_1 t dt, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n2\pi f_1 t dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(2)を $f(t)$ のフーリエ級数と呼ぶ。

$f_1 = 1/T$ を基本周波数、 $\cos n2\pi f_1 t$, $\sin n2\pi f_1 t$ を n 次高調波と呼ぶ。

15.3 直交展開とフーリエ級数

- 式 (2) (3) のフーリエ級数展開は、次式 (4) のオイラーの恒等式を使い、かつ $\omega_0 = 2\pi f_1$ なる尺度変換を行うことにより、式 (5) (6) の複素形式表現で記述できる。

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (4)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(jn\omega_0 t) \quad (5)$$

- ここで、 C_0 , C_n , C_{-n} は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} \\ C_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\ C_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (6)$$

15.3 フーリエ変換 & 逆変換

- 周期関数として与えられる連続信号 $f(t)$ は、フーリエ級数展開ができた。
- 一般的関数は周期をもたないので、フーリエ級数展開ができない。そこで、一般的な非周期関数を周期が無限大の周期関数とみなし、フーリエ級数展開する技法を用いる。
- 式(6)を式(5)に代入すると、下記の式(7)が成り立つ。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt \right\} \frac{1}{2\pi} e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \cdot \frac{2\pi}{T} \quad (7)$$

- ここで、 $T \rightarrow \infty$ とすると、 $n \cdot 2\pi / T \rightarrow \omega$ 、 $2\pi / T \rightarrow d\omega$ になるので、右辺を $T \rightarrow \infty$ とすると、下記の式(8)が成立する。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt e^{j\omega t} d\omega \quad (8)$$

15.3 フーリエ変換 & 逆変換、周波数スペクトル

- 式 (8) を内部の積分を分離して表示すると、次の式 (9) (10) のように書ける。

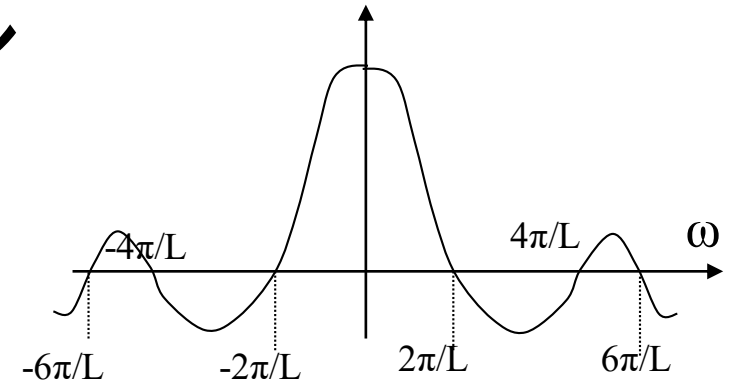
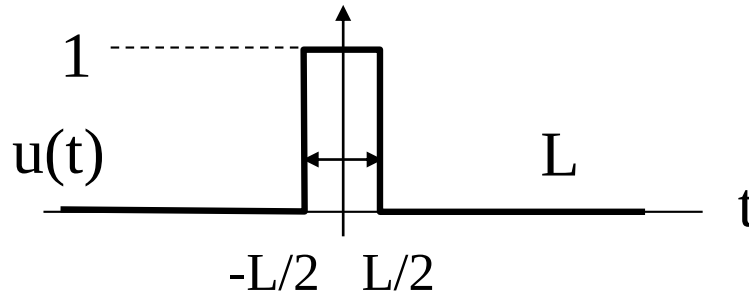
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (10)$$

- 式 (9) をフーリエ変換、式 (10) をフーリエ逆変換と呼ぶ。
- 式 (9) は、フーリエ係数(式 (6))に対応し、周波数 ω の単振動 $e^{j\omega t}$ の振幅に比例する量を示す。これを周波数スペクトルと呼ぶ。
 - 周期関数では、基本周波数 $\omega_0 = 2\pi/T$ の整数倍周波数(高調波)がどのくらいウェイトをもつを示すフーリエ係数が重要な量であった。
 - 非周期関数では、周波数スペクトル $F(\omega)$ が重要な量。

15.3 周波数スペクトル

・ 孤立波(パルス)の周波数スペクトル



$$u(t) = 1 \quad -\frac{L}{2} \leq t \leq \frac{L}{2} \quad ; = 0 \quad \frac{L}{2} < |t|$$

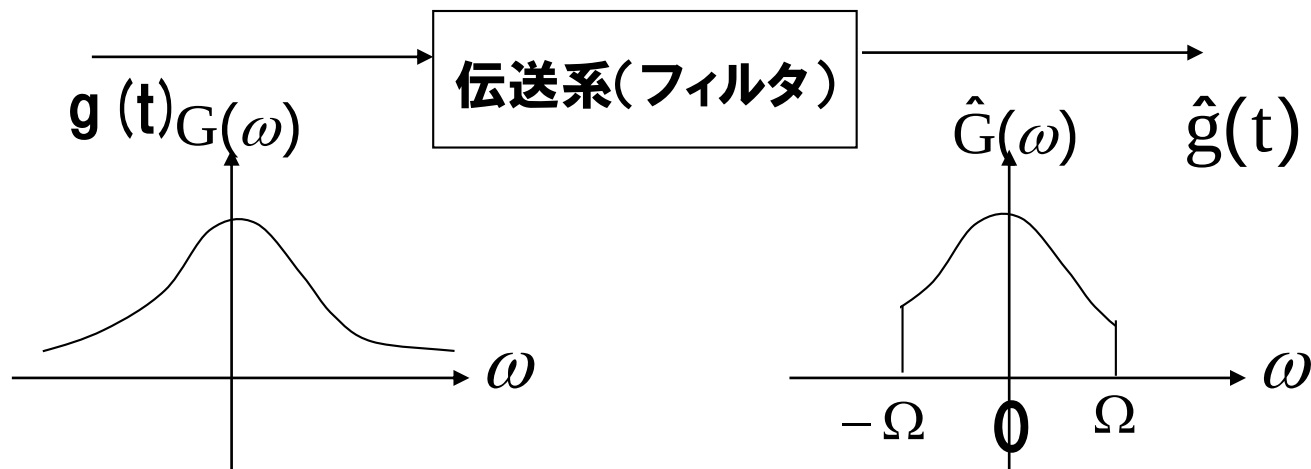
$$U(\omega) = \int_{-L/2}^{L/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega L}{2}} - e^{-j\frac{\omega L}{2}}}{2j} = \frac{2}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega L}{2} = L \cdot \left\{ \frac{\sin \frac{\omega L}{2}}{\frac{\omega L}{2}} \right\}$$

標本化関数

15.4 帯域制限信号

- ・ 時間的に連続して発生する連続的情報(連続信号)を考え、時間 (t) の関数 $g(t)$ で表す:
- ・ 連続信号 $g(t)$ は、周波数スペクトルに関して通過を許す周波数の範囲(周波数帯域という)をもつ。
- ・ 周波数スペクトル $F(\omega)$ が有限の最高周波数に制限された連続信号を、帯域制限信号、と呼ぶ。

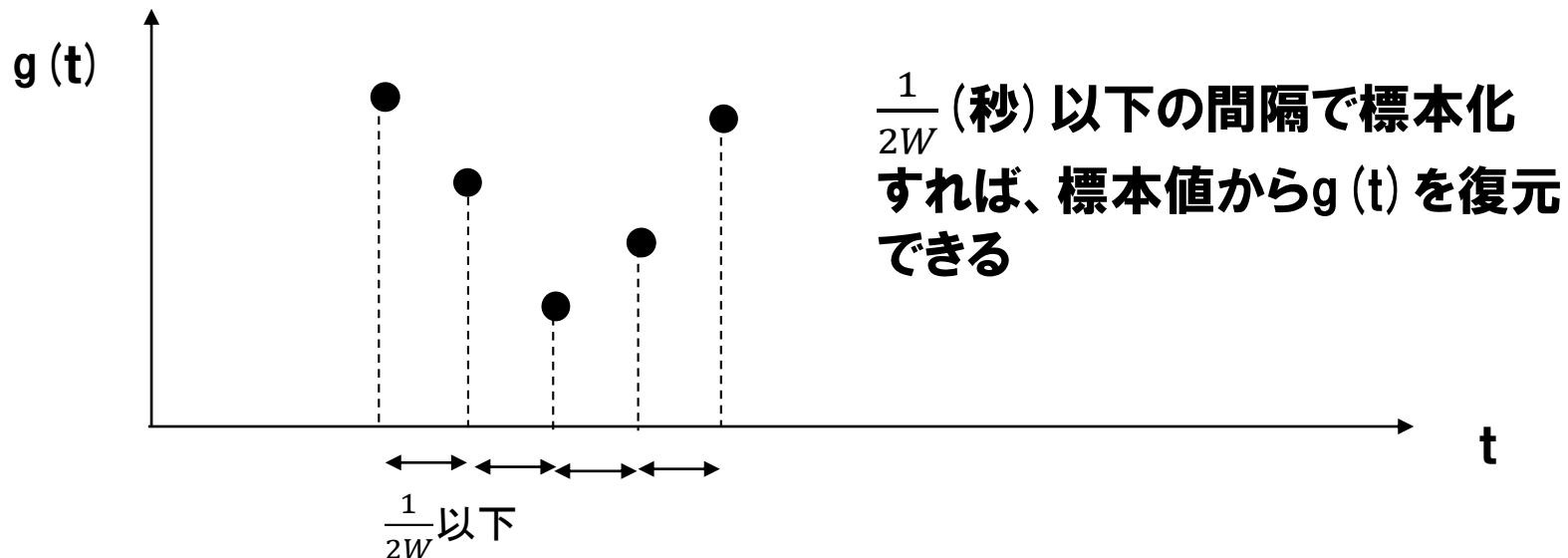


周波数 ω は非負の数であるが、形式的に負を加えて扱う

$$\hat{G}(\omega) = \begin{cases} G(\omega) & -\Omega \leq \omega \leq \Omega \\ 0 & \Omega < |\omega| \end{cases}$$

15.5 標本化定理・・・言葉で表現すると

- 連続信号の周波数帯域が有限に制限されているとき、その帯域 (W) の2倍以上の標本化周波数 ($2W$) で標本化すれば、標本値列より元の連続信号を一意的に復元できる
 - 標本化周波数 ($2W$) の $\frac{1}{2}$ 、即ち W 、をナイキスト周波数ともいう
 - ナイキスト周波数の逆数 ($\frac{1}{W}$) はナイキスト周期ともいう
 - 標本化周波数の逆数 ($\frac{1}{2W}$) はナイキスト間隔と呼ばれるので、言葉を混同しないこと



15.5 標本化定理・・・数式で表現すると

・ 標本化定理(シャノン、染谷、ナイキスト)

- ・ 周波数 W (Hz) より高い周波数成分を含まない**帯域制限連続信号** $x(t)$ は、 $\frac{1}{2W}$ (秒) 毎にとった標本値のみにより再現できる。 $\frac{1}{2W}$ を**ナイキスト間隔**という。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin 2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)}$$

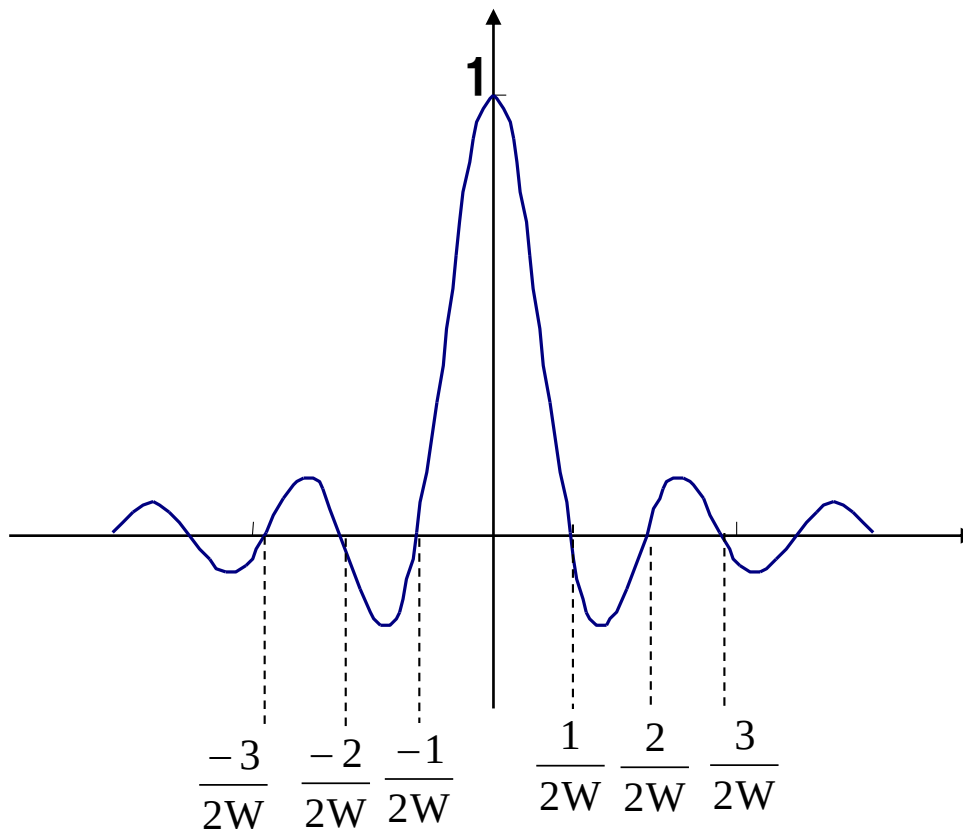
・ 意味

- ・ 連続信号波形 $x(t)$ は、いくつかの単振動(sin)波形の和として表現できる。
- ・ $x(t)$ が帯域制限された信号ならば、 W より高い周波数をもつ単振動は含まれないから、 $x(t)$ の波形はある程度以上の激しい変化のない「なめらかな」波形と考えられる。
- ・ このような波形は、離散値を適当に選べば元の波形が完全に復元できることを意味する。

15.6 標本化関数のグラフ

標本化関数

$$\frac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt}$$

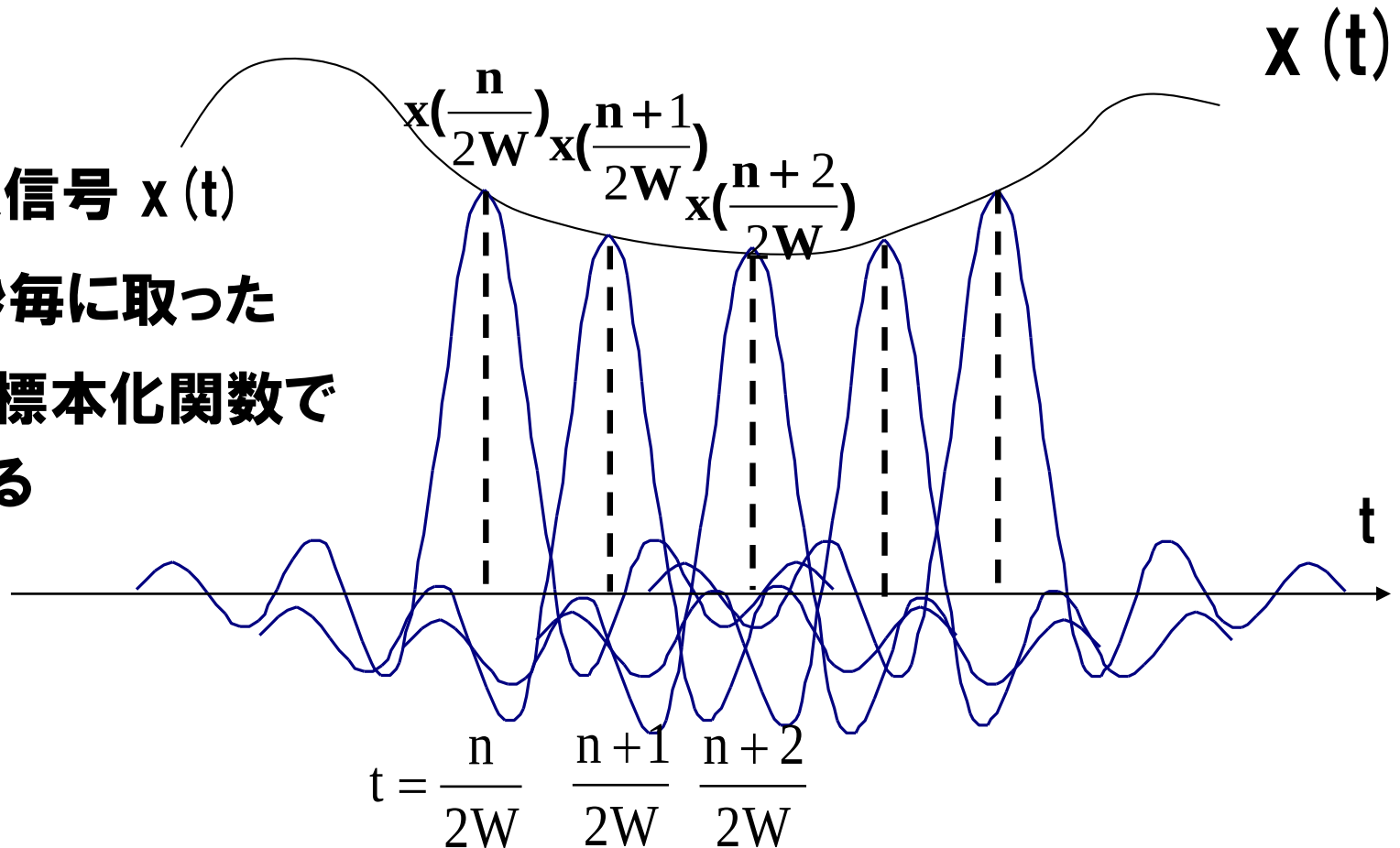


— 標本化関数

15.7 標本化定理による帯域制限信号の展開

帯域制限信号 $x(t)$

は、 $\frac{1}{2W}$ 秒毎に取った
標本値と標本化関数で
展開できる



$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

15.8 標本化定理の証明

- [証明] $x(t)$ に関してフーリエ変換対が存在するものとする.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad j = \sqrt{-1} \text{ (虚数単位)} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \dots\dots\dots(2)$$

- $X(f)$ は $|f| < W$ に帯域制限されているので,

$$x(t) = \int_{-W}^W X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \dots\dots\dots(3)$$

- $X(f)$ は $[-W, W]$ を周期として周波数上でフーリエ級数に展開できる.

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi f \frac{n}{2W}}, \quad c_n = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X(f) e^{-j2\pi f \frac{n}{2W}} df \quad \dots\dots\dots(4)$$

15.8 証明(つづき)

- 式 (3) と (4) を比較すると, c_n と $x(t)$ の間に次の関係があることが分かる.

$$c_n = \frac{1}{2W} x\left(-\frac{n}{2W}\right) \dots\dots\dots(5)$$

- 式 (5) を式 (4) の $X(f)$ に代入すると,

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2W} x\left(-\frac{n}{2W}\right) e^{j2\pi f \frac{n}{2W}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2W} x\left(\frac{n}{2W}\right) e^{-j2\pi f \frac{n}{2W}} \dots\dots\dots(6)$$

- $x(t)$ はこの $X(f)$ を逆フーリエ変換することにより求められる.

15.8 証明(つづき)

- 式 (6) を式 (3) に代入すると

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2W} x\left(\frac{n}{2W}\right) \int_{-W}^W e^{j2\pi f(t - \frac{n}{2W})} df \quad \dots\dots\dots(7)$$

- ここで積分のところは、次のように計算できる

$$\frac{1}{2W} \int_{-W}^W e^{j2\pi f(t - \frac{n}{2W})} df = \frac{1}{2W} \frac{e^{j2\pi f(t - \frac{n}{2W})}}{j2\pi f(t - \frac{n}{2W})} \bigg|_{-W}^W = \frac{\sin 2\pi W(t - \frac{n}{2W})}{2\pi W(t - \frac{n}{2W})} \dots\dots\dots(8)$$

- これより,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin 2\pi W(t - \frac{n}{2W})}{2\pi W(t - \frac{n}{2W})} \quad \dots\dots\dots(9)$$