情報理論（No.3）

2016/10/1

今後の講義予定

10/8：通常（第4回）

10/15：通常（第5回）

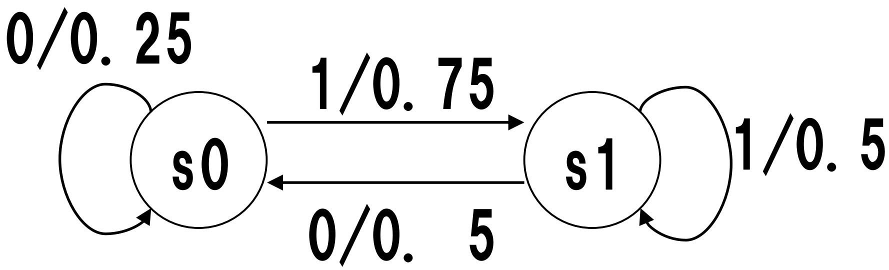
10/22：休み（平塚祭）

講義目次

- 3. 情報源
  - 3.4　マルコフ情報源
- 4. 符号の性質
  - 4.1 情報源の符号化
  - 4.2 符号化と情報源の確率の関係
  - 4.3 符号の性質と分類
  - 4.4 符号の種類
  - 4.5 瞬時復号可能な符号
  - 4.6 符号の木（tree)
  - 4.7 語頭条件
  - 4.8 瞬時復号可能な符号の作り方
  - 4.9 クラフトの不等式
  - 4.10 瞬時復号可能符号の構成例
  - 4.11 マクミランの不等式
  - 4.12 クラフトの不等式とマクミランの不等式の違い

3.4.13単純マルコフ情報源の状態遷移図（例:2状態）

図3.4-1　　遷移図例1



同じ内容

条件付確率

P(0|s0)=0.25,　P(1|s0)=0.75
P(0|s1)=0.5,　P(1|s1)=0.5

状態を簡略に表記すると

P(0|0)=0.25,　P(1|0)=0.75
P(0|1)=0.5,　P(1|1)=0.5

シンボル　生起確率

「0/0.25」の意味：
シンボル(0)が確率0.25で生起する

典型的出力シーケンス

0 1 1 0 1 0 0 1 ・・・

①②③

①の時点で状態s0とすると、次のシンボル”1”は確率0.75で発生し、②の時点で状態s1に移っている。更に次のシンボル”1”が確率0.5で発生し、同じ状態s1にとどまっている。

（注意）
ある状態から出る矢印の確率の和は1

3.4.14 2重マルコフ情報源の状態遷移図（例:4状態）

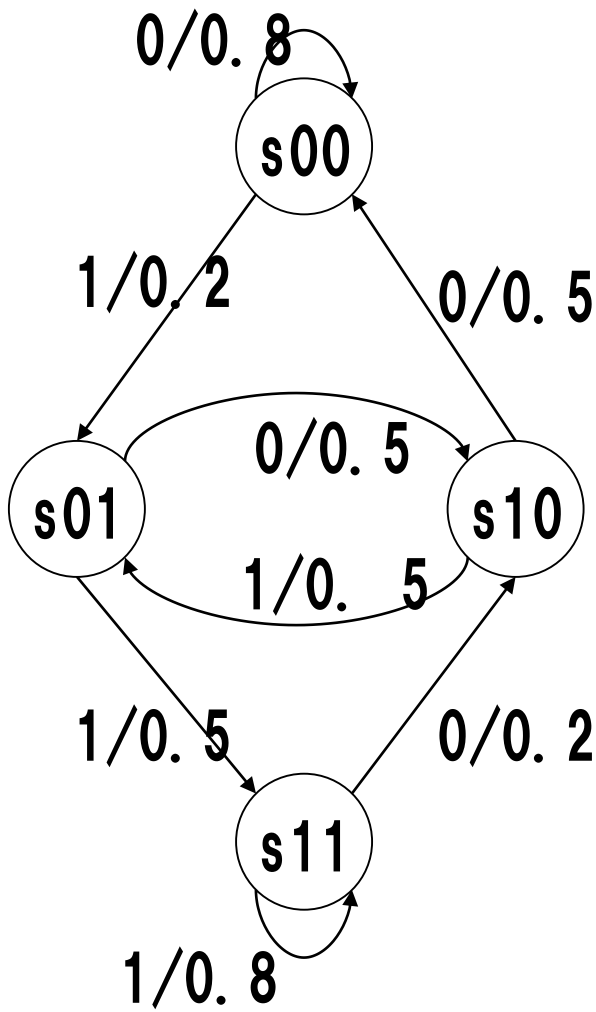


図3. 4-2　　遷移図例2

典型的出力シーケンス

0 1 1 1 0 0 0 1 ・ ・ ・

①②③④

①の時点で状態s01とすると、次のシンボル”1”は確率0. 5で発生し、②の時点で状態s11に移っている。
更に次のシンボル”1”が確率0.8で発生し、③では同じ状態s11にとどまっている。
更に次のシンボル”0”が確率0.2で発生し、④では状態s10に移っている。

$$\left.\begin{array}{ll} P(0|00)=0.8, & P(1|00)=0.1 \\ P(0|01)=0.5, & P(1|01)=0.5 \\ P(0|10)=0.5, & P(1|10)=0.5 \\ P(0|11)=0.2, & P(1|11)=0.8 \end{array}\right\}\text{条件付確率}$$

3.4.15 マルコフ情報源の性質・分析

- マルコフ情報源の性質は、状態間の遷移の様子に依存する
- 遷移の仕方に一定の制限を生じさせる特別な状態がある
- 遷移図または遷移行列で、これらの性質を調べることができる

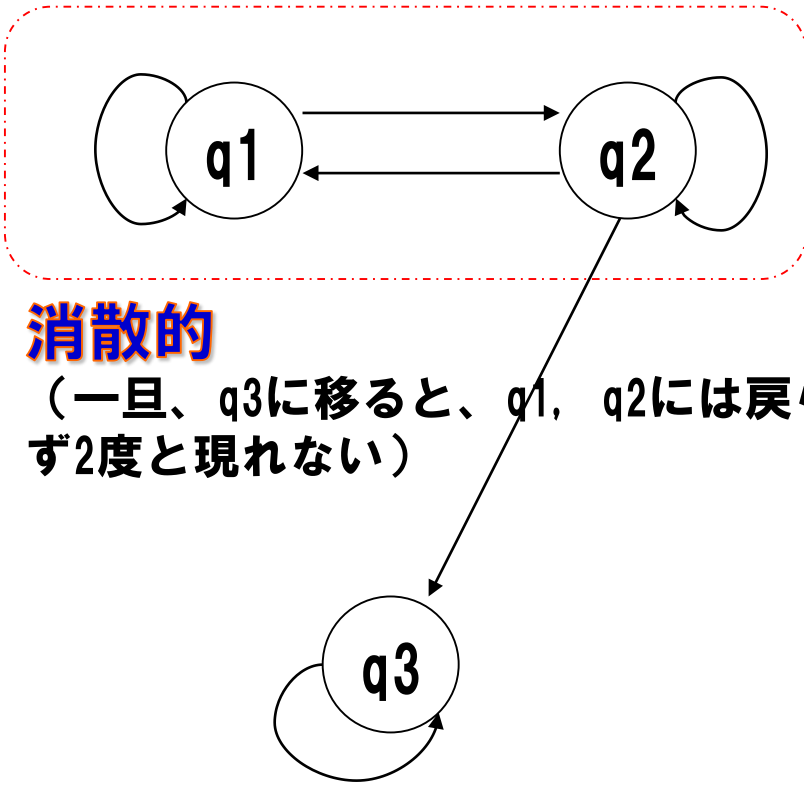
3.4.16 マルコフ情報源の状態(1)

- **吸収的**状態Ｑｊ
  - ある状態から状態Ｑｊに一旦移るとそこから抜け出せない状態
- **消散的**状態Ｑｊ
  - 遷移していく過程で、究極的に消えてしまう状態
- **同期的**状態Ｑｊ
  - 元のＱｊに戻るのに一定の周期でしか戻れないとき
- **エルゴード的**状態Ｑｊ
  - 消散的でもなく、周期的でもないとき
- **過渡的**状態Ｑｊ
  - 初期または遷移の途中の状態で、いつかは本質的状態集合に遷移してくる状態

3.4.17 マルコフ情報源の状態(2)

- **本質的状態集合**
  - それに属する任意状態から、同じくそれに属する任意状態に到達できるような状態集合
- **定常分布**
  - 状態遷移を繰り返して、ある一定数の遷移で到達する安定した状態の集合。存在する場合としない場合がある。
- **極限分布**
  - 状態分布が遷移を繰り返したとき、分布の極限値が存在するとき、これを極限分布という。
- **正規マルコフ情報源**
  - 状態遷移行列の何乗かが正の要素だけをもつようになるようなマルコフ情報源。ただ１つの極限分布をもち、定常分布に一致する。

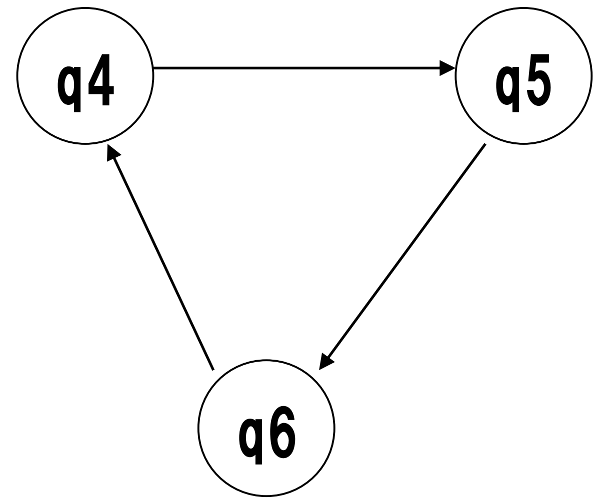
3.4.18 マルコフ情報源の状態(3)



消散的
（一旦、q3に移ると、q1, q2には戻らず2度と現れない）

吸収的
（一旦q3に移ると抜け出せない）

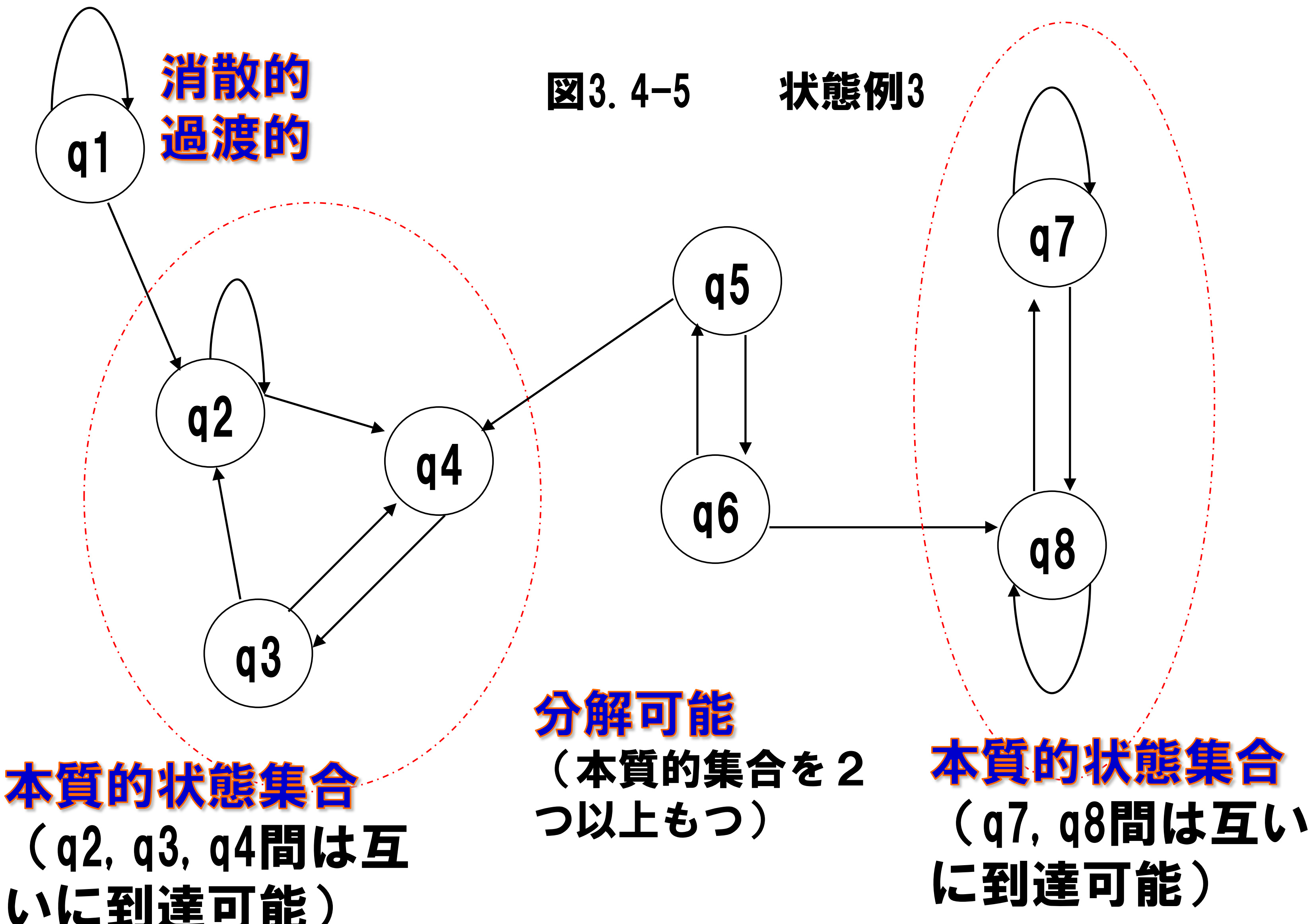
図3.4-3　状態例1



周期的
（出力系列がq4, q5, q6を周期的に繰り返す）

図3.4-4　状態例2

3.4.19 マルコフ情報源の状態(4)



3.4.20 マルコフ情報源の状態の分類

マルコフ情報源

分解不可能(indecomposable)なマルコフ情報源
・本質的な状態集合が一つだけ存在
・定常分布が唯一（ただ一つ）存在

分解可能(decomposable)なマルコフ情報源
・本質的な状態集合が二つ以上存在
・定常分布が唯一でない

分解不可能なマルコフ情報源の分類

★エルゴードマルコフ情報源
・過渡的状態を持たない

それ以外のもの

エルゴードマルコフ情報源の分類

★正規マルコフ情報源
・周期T=1である（=非周期的）
・唯一（ただ一つ）の極限分布をもち、それが定常分布と一致する

それ以外のもの

(注)講義で扱うマルコフ情報源は、ほとんど★印のついた「エルゴード」「正規マルコフ」である

3.4.21 エルゴードマルコフ情報源

- 【定理】エルゴードマルコフ情報源があり、その状態遷移確率行列をΠ（パイ）とすると、
  - この情報源の<u>定常分布がただ一つ存在する</u>。即ち、$W=(w_1,w_2,\ldots,w_k)$として、

$$
\left.\begin{array}{ll}
W\Pi=W & \cdots\cdots(3.4\text{-}1) \\
\sum_i w_i=1 & \cdots\cdots(3.4\text{-}2) \\
w_i \geqq 0 & \cdots\cdots(3.4\text{-}3)
\end{array}\right\}
$$

  の３つの条件式を満たすベクトルW がただ一つ存在する
  - Wの成分は全て正である。即ち、

$$w_i>0$$

  - 状態q_iから出発し、最初のn回の遷移で状態q_jに移る回数を$h_{ij}^{(n)}$とすれば、任意のεに対して初期状態のいかんにかかわらず、

$$\lim_{n\to\infty} P[\,|h_{ij}^{(n)}/n - w_j\,|>\varepsilon]=0$$

$h_{ij}^{(n)}$は観測ごとに変わる不規則変数であるが、nが十分に大きくなると、殆ど確実に一定値w_jに近づく、ことを意味する。このw_jは初期状態(q_i)に依存せず最終状態(q_j)に依存する値であり、定常状態(定常分布)に一致する。

3.4.22 エルゴードマルコフ情報源の定常確率

- **状態Q_iから出発して、n回の遷移でQ_jに達する確率$p^{(n)}_{ij}$は、nが大きくなると一定値に近づき、状態Q_jだけで決まる（Q_iに無関係になる）。即ち、次式が成立する：**

  $$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = P(Q_j)$$

  $P(Q_j)$：定常確率という

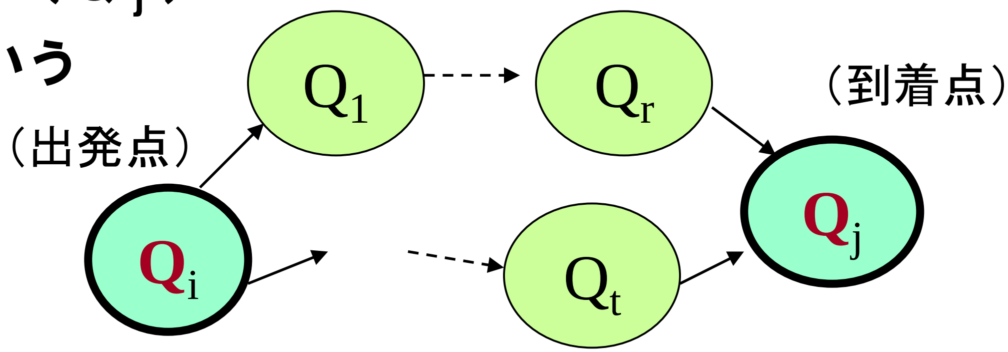


図3. 4-6　　状態遷移

- **定常確率の性質**
  - $\sum_j p(Q_j) = 1$ ・・・・(3.4-4)
  - $\sum_i P(Q_i) p_{ij} = P(Q_j)$ ・・・・(3.4-5)

    Q_jへは必ずどれかの状態から遷移してくるので、この式が成立する

3.4.23 定常確率の計算法

- **エルゴード情報源の定常確率（例）**
  - **図3.4-2の遷移図例に対応する遷移行列**

$$
P = \begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}
$$

が与えられたとき、前の計算式から求まる。
$P(Q_i)=\pi_i$と置き、π_iに関する連立方程式を解く。

3.4.24 定常確率の計算法（例）

$$\left.\begin{array}{l} P(Q_1=S_{00})=\pi_1 \\ P(Q_2=S_{01})=\pi_2 \\ P(Q_3=S_{10})=\pi_3 \\ P(Q_4=S_{11})=\pi_4 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(3.4\text{-}6)$$

と置き、π_i に関する連立方程式を立てる。

$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1$ ・・・・(3.4-7)

$[\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4]\,P=[\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4]$ ・・・・(3.4-8)

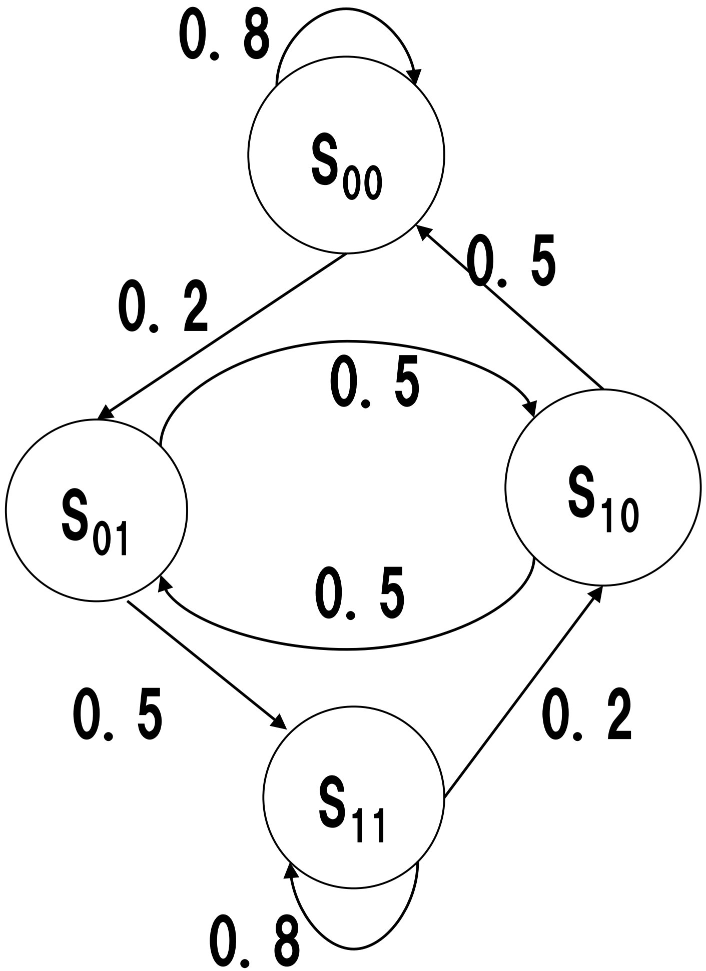
式(3.4-8)を展開すると、次の式になる

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1*0.8+\pi_2*0+\pi_3*0.5+\pi_4*0=\pi_1 \\ \pi_1*0.2+\pi_2*0+\pi_3*0.5+\pi_4*0=\pi_2 \\ \pi_1*0+\pi_2*0.5+\pi_3*0+\pi_4*0.2=\pi_3 \\ \pi_1*0+\pi_2*0.5+\pi_3*0+\pi_4*0.8=\pi_4 \end{array}\right\} \quad (3.4\text{-}9)$$

式(3.4-7)と式(3.4-9)よりπ_i を求めると、

$\pi_1=5/14$, $\pi_2=2/14$, $\pi_3=2/14$, $\pi_4=5/14$

3.4.25 定常確率の意味



定常状態では、右の確率分布になる

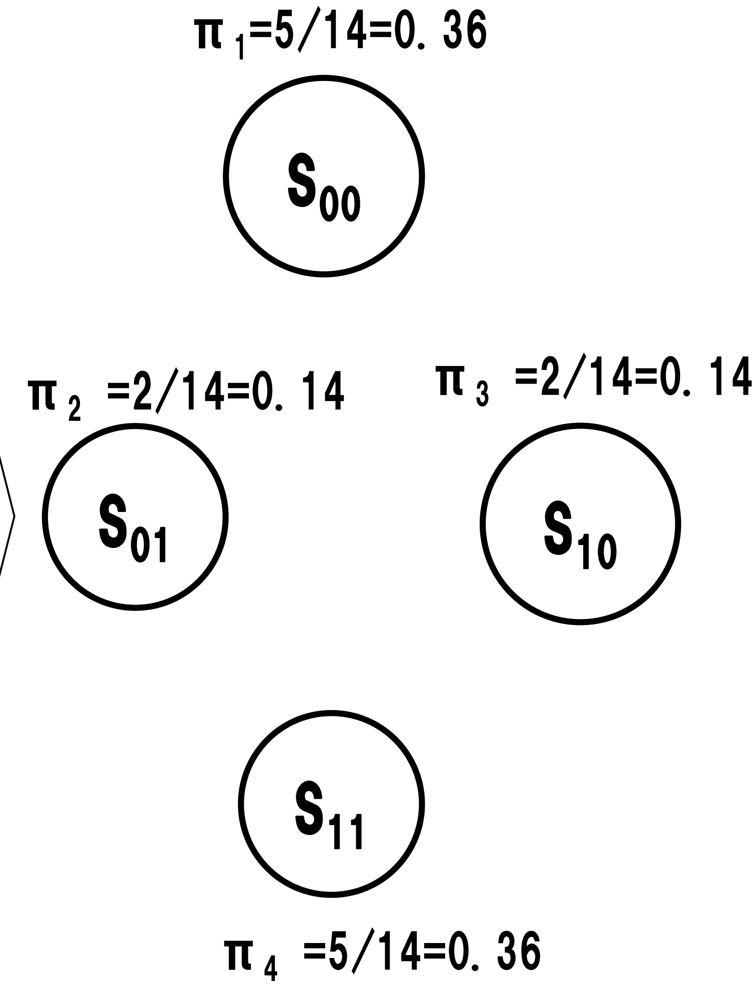


図3. 4-7　遷移図例2（図3. 4-2と同じ）

図3. 4-8　定常状態の確率分布

3.4.25 定常確率の意味

- 十分長時間観測すれば、はじめの状態分布と無関係な一定の状態分布に近づく。
- 典型的出力シーケンスは、定常状態の確率分布が一定値に近づくような系列を発生させる。

0 1 1 1 0 0 0 1 ・ ・ ・ 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0

s_{01} s_{10} s_{00} s_{11} s_{00}

$$s_{00}=s_{11}=5/14$$
$$s_{01}=s_{10}=2/14$$

図3.4-9　定常状態の典型的出力系列

3.4.26 エルゴード情報源の性質

- 状態遷移を十分に長時間観測すれば、その観測の結果得られる状態の頻度分布は、状態の定常分布に確実に一致する。すなわち『特定の一つの出力系列を長時間観測することによって、その統計的性質が分かる。』つまり、『その時観測された出力系列がその情報源の代表的な出力系列であり、時間平均＝集合平均、が成り立つ。』

- 非エルゴード情報源の性質
  - <u>過渡状態をもつ情報源</u>では、過渡状態が一時的しか起こりえないので、ある特定系列をいかに長時間観測してもそれが現れる可能性は低く、全体の性質は分からない。
  - <u>本質的状態集合が２つ以上ある情報源</u>でも、初期状態がどの状態集合に属していたかによって、その後の性質が定まるので、特定系列を観測しても、全体の性質が分かることはない。

3.4.27 エルゴード情報源の説明

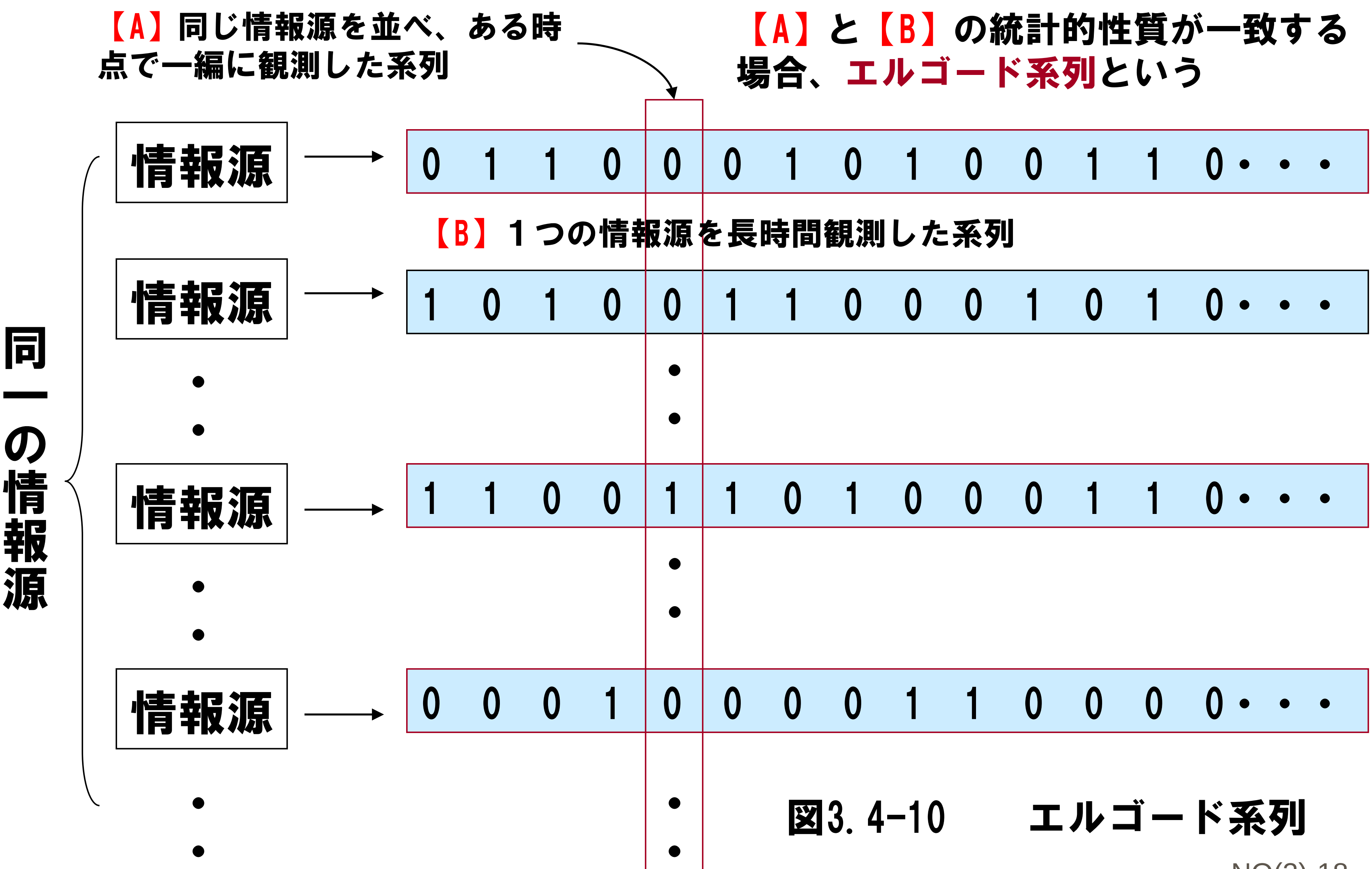


図3.4-10　エルゴード系列

3.4.28 マルコフ情報源のエントロピー

- <u>エルゴードm重マルコフ情報源</u>を対象として考える。
  - 条件付き確率$p(s_i|s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm})$が与えられれば、状態確率$P(s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm})$が定まる。
- 情報源の状態が$Q_j=(s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm})$のとき（即ち、いまをさかのぼるm個の出力シンボルが（$s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm}$）のとき）, 次の(m+1)番目のシンボルが$s_i$である結合確率は、

$$p(s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm}, s_i) = p(s_i|s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm})\,P(s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm}) \quad \cdots (3.4\text{-}10)$$

- ある状態q_jでのエントロピーは、(条件付確率の平均値として計算できるので）

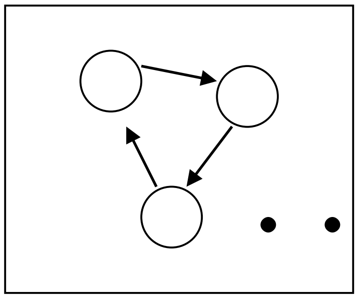
$$H(S|q_j) = -\sum_i p(s_i|q_j)\log p(s_i|q_j) \quad \cdots (3.4\text{-}11)$$

- 状態q_jをそれが取りうる全状態について平均をとると

$$H(S) = \sum p(q_j)\,H(S|q_j) = -\sum_j \sum_i p(q_j, s_i)\log p(s_i|q_j) \quad \cdots (3.4\text{-}12)$$

3.4.29 マルコフ情報源のエントロピーの意味

マルコフ情報源



出力系列

s2, s1, s1, , s2, s1…
(例：10001000, …)

図3.4-11　出力系列

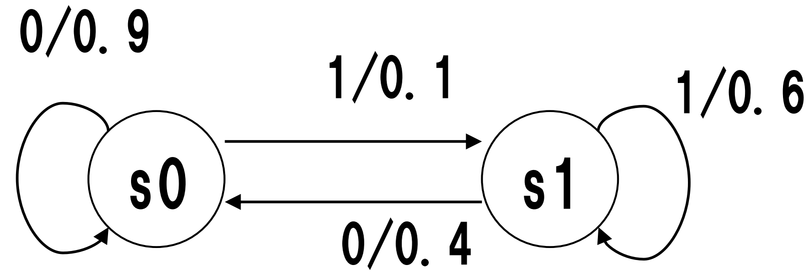
- 出力系列のシンボルを知ったときに、情報源に関して受け取る平均の情報量
  - 状態がq_jにあるとき、出力シンボルs_iを生じたとする。これを知った時に受け取る情報量は、$\log(1/p(s_i|q_j))$
  - 全て起き得るs_iについて平均すれば、状態がq_jにあるときの平均情報量$H(S|q_j)$になる。
  - さらにこれを、全ての状態について平均とると、シンボル当たりの平均情報量$H(S)$になる

3.4.30 マルコフ情報源のエントロピー計算(1)

- 単純マルコフ情報源(S)について、Sの状態の定常分布を(w_0, w_1)とすると、w_0, w_1は、

$$(w_0, w_1)\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = (w_0, w_1)$$

$$w_0 + w_1 = 1$$



マルコフ情報源（S)

図3.4-12　　マルコフ情報源

より、w_0=0.8, w_1=0.2となる。すなわち、情報源（S)は確率0.8で状態s_0になり、確率0.2で状態s_1になる。

<u>状態s_0にある時に着目すると、1と0を確率0.1と 0.9で発生する無記憶情報源と同等である。</u>従って、その場合のエントロピーを$H_{s0}(S)$とすると、$H_{s0}(S)$=-0.1 log 0.1 - 0.9 log 0.9 =0.469

同様に、Sが状態s1にある時に着目すれば、そのエントロピー$H_{s1}(S)$は、

$H_{s1}(S)$= - 0.4 log 0.4 -0.6 log 0.6=0.970

3.4.30 マルコフ情報源のエントロピー計算(2)

- これらを平均して、情報源Sのエントロピー$H(S)$は、$H(S)=0.8\times0.469+0.2\times0.970=0.5694$となると考えられる。
- 実際にn次の遷移について、エントロピー$H_n(S)$を計算すると、下図の通り0.5694に収束していく。

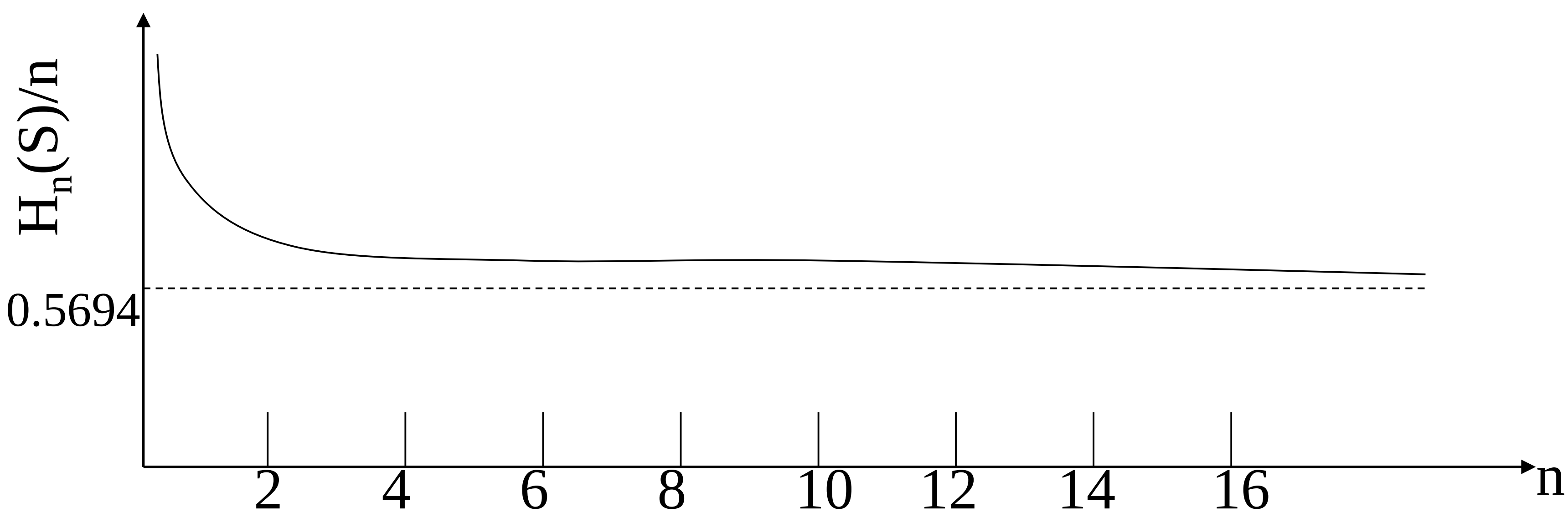


図3.4-13　　マルコフ情報源のエントロピー

3.4.30 マルコフ情報源のエントロピー計算(3)

- これを一般化すると、一般マルコフ情報源のエントロピーが計算できる。
- M個の情報源アルファベット（$a_1, a_2, \ldots, a_M$)、N個の状態$(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{N-1})$およびその定常状態確率分布$(w_0, w_1, \ldots, w_{N-1})$とし、状態$s_i$にあるときに情報源記号$a_j$を発生する確率を$P(a_j | s_i)$とすれば、エントロピーSは次式で表される。

$$H(S) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i \left[- \sum_{j=1}^{M} P(a_j | s_i) \log_2 P(a_j | s_i) \right]$$

・・・(3.4-13)

これまでのまとめ

1. 情報を通報シンボルとして扱う
2. 通報シンボルは適切な符号に変換して伝達可能
3. 効率的な符号は通報の発生確率を利用する
4. 情報量の定義・・・・・自己情報量
5. 無記憶情報源
6. 平均情報量、エントロピー（情報源のもつ不確かさ）
7. マルコフ情報源

4. 符号の性質

4.1 情報源の符号化
4.2 符号化と情報源の確率の関係
4.3 符号の性質と分類
4.4 符号の種類
4.5 瞬時復号可能な符号
4.6 符号の木（tree)
4.7 語頭条件
4.8 瞬時復号可能な符号の作り方
4.9 クラフトの不等式
4.10 瞬時復号可能符号の構成例
4.11 マクミランの不等式
4.12 クラフトの不等式とマクミランの不等式の違い

4.1 情報源の符号化

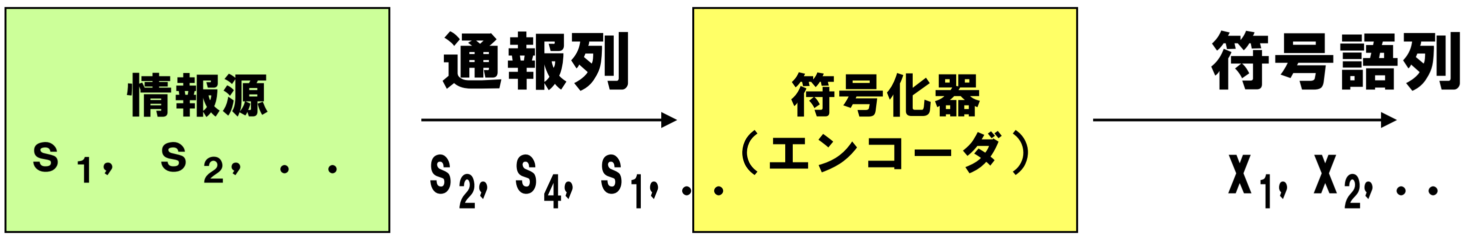


図4.1-1　　情報源符号化の位置づけ

- 情報源の符号化とは、<u>情報源の系列を別の系列に変換すること</u>
- 変換された系列を符号語（code）と呼ぶ。(*)
- 情報源の各シンボルを一定の長さに区切り、符号化する符号を<u>ブロック符号(block code)</u>と呼ぶ

(*) <u>符号語の集合</u>の意味で「符号」という言葉を用いることが多いが、<u>それぞれの符号語</u>の意味にも使われることもある。

4.2 符号化と情報源の確率の関係(1)

- 符号例：Ａ　（等長符号）

通報	生起確率	符号語
s_1：晴	１／４	００
s_2：曇	１／４	０１
s_3：雨	１／４	１０
s_4：霧	１／４	１１

全ての天気はこの4種類と仮定する

例えば、ある4日間の天気通報（晴、霧、霧、曇）を表す符号は、００１１１１０１、となる

- この符号は、
  - 一意に復号できる符号
  - １つの通報あたり２桁を使う符号

4.2 符号化と情報源の確率の関係(2)

- 別の符号例：Ｂ　（不等長符号）

通報	生起確率	符号語
s_1：晴	１／４	１０
s_2：曇	１／８	１１０
s_3：雨	１／８	１１１０
s_4：霧	１／２	０

晴、霧、霧、曇を表す符号は、<u>１０００１１０、</u>となる

- この符号は、
  - 一意に復号できる符号
  - １つの通報あたり１．８７５桁を使う符号

<u>１通報あたりの桁数（＝平均符号長）を求める公式</u>：

$$L = \sum_i L_i * P_i = L_1 * P_1 + L_2 * P_2 + \cdots + L_n P_n$$

（各通報に対する符号語の長さ　x　各通報の生起確率　の総和）

4.2 符号化と情報源の確率の関係(3)

- **符号Ａと符号Ｂの比較**
  - **符号Ａ：<u>等確率</u>の情報源で<u>等長符号</u>（2桁）**
  - **符号Ｂ：<u>不等確率</u>の情報源で<u>不等長符号</u>（1～4桁）**

情報源の性質	符号Ａ	符号Ｂ
４通報、等確率	２桁／通報	２．５桁／通報
４通報、不等確率	２桁／通報	１．８７５桁／通報

⇨ 予想:
確率を考慮すると短い符号が作れそうであるが、どんな確率分布でも常に一番短くなる符号はありそうにない。

4.3 符号の性質と分類

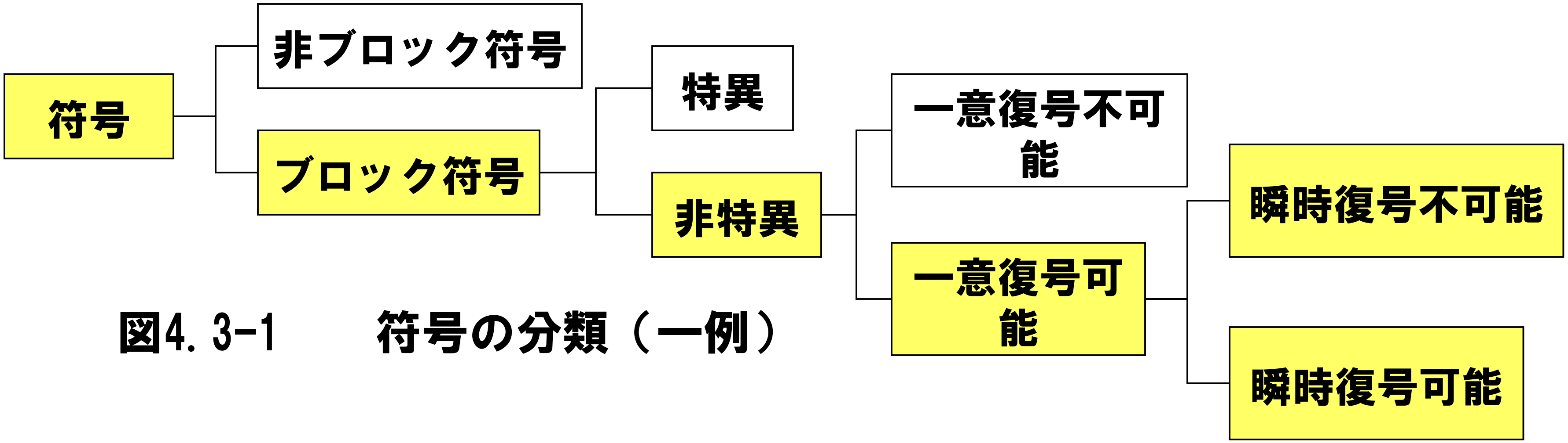


図4.3-1　　符号の分類（一例）

- **非特異符号**とは、すべての符号語が異なるもの
  - 次ページの符号１は特異符号
  - 次ページの符号２～４は非特異符号
- 非特異符号でも、復号時に曖昧性が生じるものがある
  - 次ページの符号２は、一意復号不可能な符号
- **一意復号可能符号**は、どんな長さの記号列に対しても非特異なもの
  - 次ページの符号３、符号４はいずれも一意復号可能な符号

4.4 符号の種類

- **瞬時復号可能符号**は、<u>ある符号語を受信すれば一意に復号可能なもの</u>
  - 受信側では、通報と符号の対応関係（符号表など）をもっていると仮定している。符号表に存在する符号パターンが受信されたとき、すぐに復号できる、ということである
- 符号の例

通報	符号１	符号２	符号３	符号４
あ	0	0	0	0
か	11	11	01	10
さ	00	00	011	110
た	11	01	0111	111
	特異	一意復号不可能	瞬時復号不可能	瞬時復号可能

4.5 瞬時復号可能な符号

通報	符号３	符号４
あ	0	0
か	01	10
さ	011	110
た	0111	111

符号３：

- 符号化列０１を受信したとき、「か」と復号できない
  - 次に 1 を受信すると、「さ」「た」の可能性が出るので。
- 符号化列０１１を受信したとき、「さ」に復号できない
  - 次に 1 を受信すると、「た」に復号しなければならないので。

符号４：

- 符号化列１０を受信したとき、「か」に復号できる
- 符号化列１１０を受信したとき、「さ」に復号できる

4.6 符号の木（Code tree) (1)

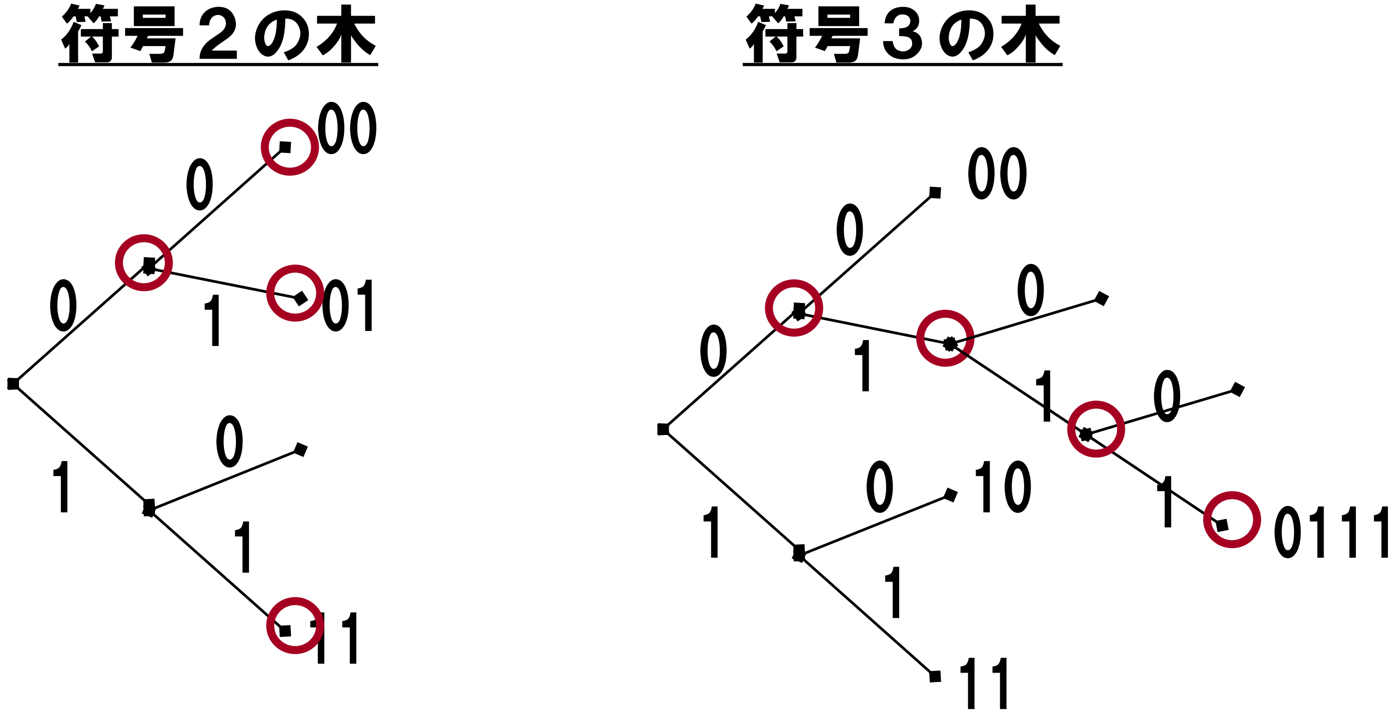


図4.6-1　　符号の木（2元符号語の2分木表現）

○ 符号語に割り当てたノード

4.6 符号の木（Code tree) (2)

符号４の木

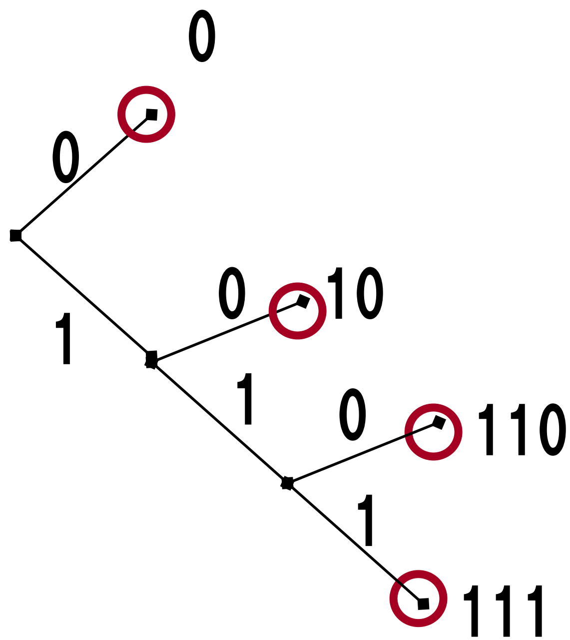


図4.6-2　　符号の木（2元符号語の2分木表現）

4.7 語頭条件：瞬時復号可能符号条件

【定義】語頭（プレフィックス）

$X_i = x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}$を符号語としたとき、これの部分列、すなわち系列（$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ij}$）を$X_i$の**語頭（プレフィックス）**という。（$j \leq m$）

（例）符号語<u>０１１１</u>は、４つの語頭（<u>０</u>，<u>０１</u>，<u>０１１</u>，<u>０１１１</u>）をもつ

【定理】

- ある符号が瞬時復号可能であるための必要十分条件は、<u>どの符号語も他の符号語の語頭になっていないこと</u>である

4.8 瞬時復号可能な符号の作り方

【例】５つの情報源シンボル（ド，レ，ミ，ファ，ソ）を２元符号化する

- 符号Ａ：
  - ド→0とすると、レ～ソは1x...（２桁以上必要）
  - レ→10とすると、ミ，ファ，ソは11x...（３桁以上）
  - ミ→110とすると、ファ，ソは111x...（４桁以上）
  - ファ→1110とすると、ソ→1111
- 符号Ｂ：
  - ド→00とすると、レ，ミは01，10
  - ファ，ソは11xとなり、ファ→110，ソ→111
- このように、符号語の長さには制限がある
  - 即ち、瞬時復号できる符号を作るには、符号の<u>長さを一定以上に短くすることはできない</u>

4.9 クラフトの不等式：
瞬時復号可能な符号が存在する条件

【前提】

- 情報源アルファベット＝｛s_1，s_2，．．．，s_q｝
- 符号アルファベット＝｛x_1，x_2，．．．．，x_r｝
- 符号語＝｛X_1，X_2，．．．，X_q｝
- 符号語長：L_1，L_2，．．．．，L_q

【定理】Ｋｒａｆｔ（クラフト）の不等式

- 符号語長がL_1，L_2，，，，L_qである瞬時復号可能な符号が存在するための<u>必要十分条件</u>は、

  $\Sigma_i \quad r^{-L_i} \leqq 1$

  が満たされること。ｒは符号シンボル数。
- 特に、２元符号の場合の不等式

  $\Sigma_i \quad 2^{-L_i} \leqq 1$

4.9 クラフトの不等式：例による検証

- ２元符号の場合のクラフトの不等式
  - $\sum_i 2^{-L_i} \leqq 1$

通報	符号3	符号4	符号A	符号D	符号E
s_1	0	0	00	0	0
s_2	01	10	01	100	10
s_3	011	110	10	110	110
s_4	0111	111	11	11	11

符号３：$2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}=15/16\leqq 1$

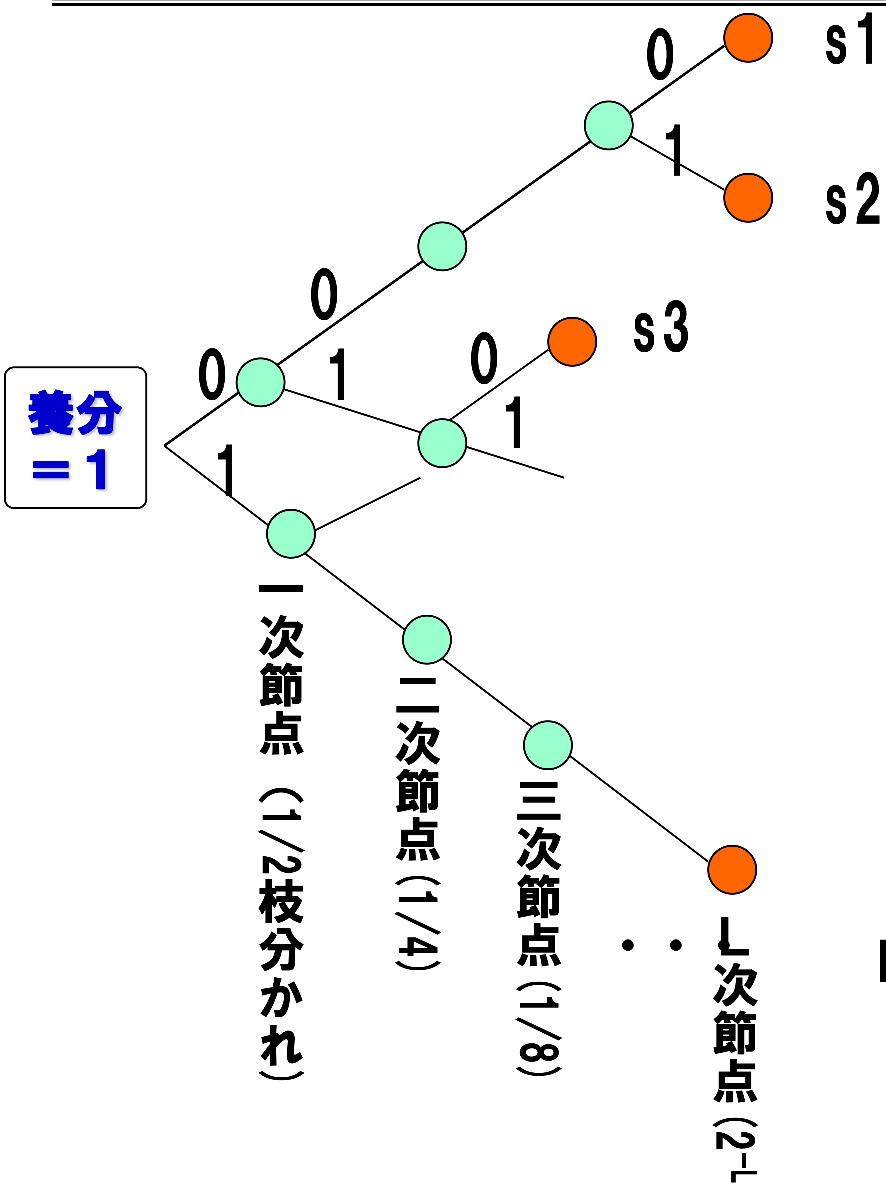
符号４：$2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-3}=1\leqq 1$

符号Ａ：$2^{-2}+2^{-2}+2^{-2}+2^{-2}=1\leqq 1$

符号Ｄ：$2^{-1}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-2}=1\leqq 1$

符号Ｅ：$2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-2}=1.125$

4.9 クラフトの不等式の証明（簡略版）



●瞬時復号可能符号は、木の先端のみに存在する。

●根本に総量１の養分を与えるとする。

●この養分は１／２ずつ枝分かれし分配される。

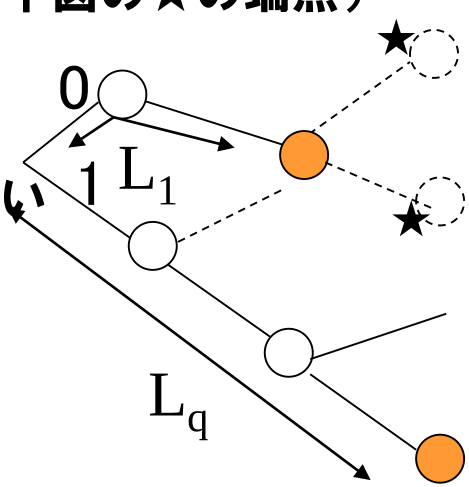
●符号長をLiの符号語に割当てられる養分は2^{-Li}。

●各符号語の栄養分を全て加えると、元の１より多くなることはない。

図4.6-1　　クラフトの不等式の説明

4.9 クラフトの不等式の証明（詳細版）

- 【定理】符号語長がL_1，L_2，，，，L_qである瞬時復号可能なr元符号が存在するための<u>必要十分条件</u>は、
  $\Sigma_i \quad r^{-L_i} \leqq 1$　　・・（１）　　$\Sigma_i \quad 2^{-L_i} \leqq 1$　(2元符号)　・・（２）
- 【証明（必要条件）】長さ$L_1, L_2, \ldots, L_q$の瞬時復号可能符号が構成できたとすれば、式（１）/式（２）を満たす。（2元符号の場合を証明するが一般化は容易にできる）
  - 符号長$L_1, L_2, \ldots, L_q$　（最大値をL_q）の瞬時復号可能符号は、接頭語条件を満たすために符号木の葉（端点）しか存在しないので、長さL_1の線上の端点のうち、$2^{L_q-L_1}$個が符号系から除外される。（下図の★の端点）
  - 同様にして、結局
  - $\Sigma_i 2^{L_q-L_i}$ 個の端点が符号系から除外される
  - この総数は、長さL_qの端点総数2^{L_q}を超えることはない
    従って、次の式が成り立つ：
  - $\Sigma_i 2^{L_q-L_i} \leqq 2^{L_q}$　この両辺を2^{L_q}で割れば、
    式（２）が得られる



4.9 クラフトの不等式の証明

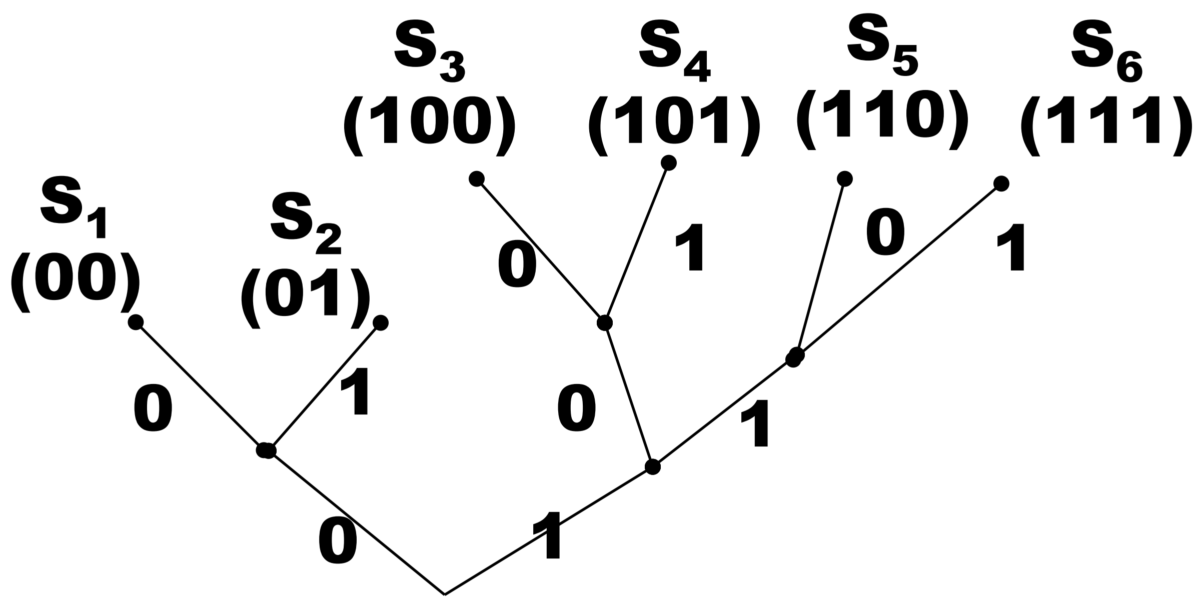
- 【証明（十分条件）】式（１）/式（２）を満たせば、長さL_1, L_2,…,L_qの瞬時復号可能符号が構成できる。$L_1 \leqq L_2 \leqq$・・・$\leqq L_q$とする。
  - 符号木を作り、長さL_1の任意の端点を符号に選ぶ。
  - $2^{Lq-L1} < 2^{Lq}$ なので、少なくとも１個の端点が除外されずに残るため、長さL_2の端点を選ぶことができる。
  - そうすると、$2^{Lq-L1} + 2^{Lq-L2}$ の端点が除外される。この数は、なおも2^{Lq}より小さいので、長さL3の端点を選べる。
  - 以下同様にして、長さL_qの端点まで選ぶ事ができ、符号系が構成できる。
- 【別の証明】長さ1の符号語数をn_1、長さ2の符号語数をn_2、．．．．、長さL (最大値）の符号語数をn_Lとする。
  - 式（２）をn_iをもちいて書き直すと、2^{-1}の形はn_1個、2^{-2}の形はn_2個含まれるので、
  - $\sum_i n_i 2^{-i} \leqq 1$　　・・・（３）　　これを2^L倍して、$\sum_i n_i 2^{L-i} \leqq 2^L$　・・・（４）
  - 式（４）を展開すると、
  - $n_1 \leqq 2$　　　　（５）
  - $n_2 \leqq 2^2-2n_1$　　　（６）

4.9 クラフトの不等式の証明

- $n_3 \leqq 2^3 - 2^2 n_1 - 2n_2$　　　　（７）
- ・・・
- 式（５）（６）（７）等は符号の構成法を与える。即ち、
- 長さ１の符号語は、式（５）より符号シンボル2より小さくなるよう、n_1個を任意に選べばよい。
- この結果、長さ１の可能なプレフィックス（符号語として使わなかった端点）は、$2-n_1$だけ残る。
- このプレフィックスに1つシンボルを追加し長さ2の符号語を作る。この数は、
- $(2-n_1)*2 = 2^2 - 2n_1$
- となる。これは式（６）より、n_2より大きいため、n_2個の長さ2の符号語を作れることを意味する。
- この結果、（2^2-2n_1）$-n_2$　の未使用プレフィックスが残る。
- これを使うと、$(2^2-2n_1-n_2)*2 = 2^3-2^2n_1-2n_2$ 個の長さ3の符号語を作る。
- これは式（７）よりn_3より大きいので、符号語が構成できる。
- 以下同様にして、すべての符号語を構成できる。

4.10 瞬時復号可能符号の構成例（2元符号）

- 例１：符号語長が２，２，３，３，３，３の２元符号
  $2^{-2}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-3}+2^{-3}=1$
  なので瞬時復号可能な符号として構成可能。

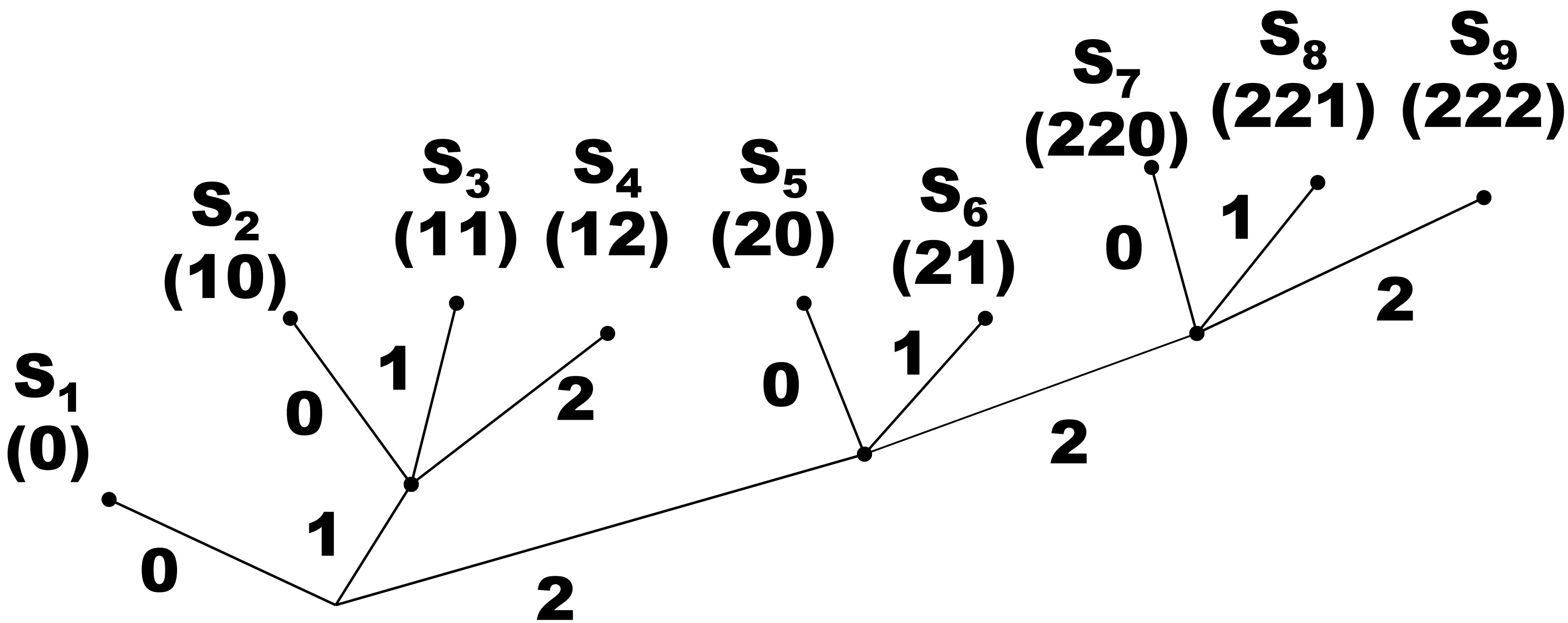


4.10 瞬時復号可能符号の構成例（３元符号）

- 例２：９個のシンボルの情報源を3元符号に符号化する。符号語長が1，2，2，2，2，2，3，3，3となるようにしたい。

  $\sum 3^{-L_i} = 1/3 + 5(1/9) + 3(1/27) = 1$

  従って、このような符号は構成可能。



4.11 マクミランの不等式

【定理】McMillan（マクミラン）の不等式

一意復号可能な符号語の符号長を

$L_1, L_2, \ldots, L_q$とすると、

$$\sum_i r^{-L_i} \leqq 1$$

が成立する

Kraftの不等式と同じ。

【意味】

クラフトの不等式は瞬時復号可能な符号が存在するための必要十分条件。符号が「非瞬時」であれば、符号長がより短い符号が見つけられるかも知れない疑問が生じる。しかし、上記の定理は、一意復号可能な符号に条件を緩めても、その可能性はなく、クラフトの不等式を満たさなければならず、より短い符号はみつからないことを証明。

4.12 クラフトの不等式とマクミランの不等式の違い

- クラフトの不等式は、瞬時に復号可能な符号としての資格を保証するのみ。すなわち、符号長の条件を満たしているので、**瞬時復号可能な符号である可能性がある**ことを示す。
- クラフトの不等式を満たしても、**語頭条件を満たさなければ瞬時復号可能ではない**。（例えば、符号Dは、11(s4)がs3の語頭になっている）
- クラフトの不等式は、「瞬時復号可能な符号の条件」であった。マクミランは、これが「一意復号可能な符号の条件」にもなっていることを証明した。